

STANDING WAVE PATTERNS IN STUDIO ACOUSTICS

by C. G. MAYO, M. A., B. Sc., M. I. E. E.

Research Department, B.B.C. Engineering Division, Tadworth, Surrey

Summary

An approximate analysis is made of the sound field in a rectangular box excited by a spherical source. Two different kinds of characteristic frequencies are observed, one of which is the set of eigentones. A general picture is obtained of the relative importance of the various modes. High frequency eigentones are relatively unimportant.

Sommaire

On fait l'étude approchée du champ sonore excité dans une enceinte rectangulaire par une source sphérique. On a observé deux types différents de fréquences caractéristiques, dont l'un est constitué par la série des sons propres. On a établi un schéma général de l'importance relative des différents modes. Les sons propres de fréquence élevée sont relativement peu importants.

Zusammenfassung

Das Schallfeld, das ein Kugelstrahler in einem rechteckigen Raum erzeugt, wird näherungsweise analysiert. Zwei verschiedene Arten von charakteristischen Frequenzen werden beobachtet. Eine von ihnen ist das System der Eigentöne. Ein allgemeiner Überblick über die relative Bedeutung der verschiedenen Schwingungsformen wird erhalten. Hohe Eigentöne sind ziemlich unbedeutend.

1. Introduction

If a continuous sound is made in the open air, sound waves travel radially outwards in every direction and the sound pressure at any point is inversely proportional to the distance from the source. In the absence of absorption or reflection the sound field ultimately fills all space.

If, however, there is a plane reflecting surface near the source all the sound which would have reached the far side of the reflecting plane appears on the near side superimposed on the original sound field. The result is equivalent to two sound sources — the original and its image in the reflecting surface — and the sound pressures are not arithmetically additive but combine in accordance with their relative phases to give a system of nodes and antinodes dependent on the frequency.

Therefore the sound field has been folded back, so to speak, into half the space giving twice the average pressure but with a node and antinode pattern due to interference.

If now the source is completely enclosed by reflecting walls, the sound which would have filled a large space is reflected into the enclosed volume,

and the condition is equivalent to an infinite number of sources consisting of the original source and its images in the walls and the images of the images and so on.

In any studio, the increase in loudness over open air conditions is due to this reinforcement and the loudness varies considerably with frequency and position. The acoustical properties of a studio do not depend on the mere presence or absence of standing wave patterns but on the nature of the patterns. A studio with small standing wave field is a dead studio.

In this paper, a study is made of the sound response of a rectangular room in the first instance to a point source of impulsive sound. The advantages of the impulsive method are discussed by VAN DER POL [1] and here it is sufficient to say that the spectrum of the impulse is similar to the spectrum of random or "white" noise. In "white" noise no specific pitch predominates and the spectrum of the impulse is the same except for the relative phase of the component frequencies.

In studio acoustics, the use of an impulsive sound is useful for rapid diagnosis. An instrument in which

a small paper diaphragm is ruptured by air pressure by means of an air pump is a convenient source. If such an "acoustic impulse generator" is operated in a completely dead room, the resultant sound heard is almost zero. In reverberant rooms, the response heard is characterised by the surroundings and resembles a pistol shot.

Such tests demonstrate the importance of the auditorium as an essential part of programme making apparatus.

2. General discussion

2.0. General method

In this section the sound pattern in a rectangular room is discussed in general terms. Section 3 is in essence a restatement of this section in mathematical terminology.

2.1.0. General

From a loudspeaker any desired signal can be sent into a room and the resultant sound field observed by a microphone. To simplify the issue the loudspeaker is taken as a small omnidirectional sound pressure generator and the microphone as an omnidirectional pressure microphone.

In practice, a loudspeaker is much more nearly a velocity source, or in other words, the cone movement is not much affected by sound pressure. Pressure and velocity are proportional in a plane sound wave but not in the divergent wave from a small source and it is for this reason that a velocity microphone should not be used at too short ranges. It is, however, easy to calculate the velocity input to give any required pressure wave [2].

The loudspeaker-room-microphone combination may be treated as a three terminal electrical network. By placing the microphone and loudspeaker in various positions in the room the whole response of the room can be determined. There are several methods of observing an unknown network and each method gives all the information required, that is, completely determines the network [1]. The best known method is the measurement of the steady state characteristic at all relevant frequencies but the method preferred here is the impulse response method.

2.1.1. Pulse response and echo time diagram

In this method the magnitude and epoch of all the echoes of an impulse are observed experimentally by means of an oscillograph with a linear time base. The exact shape of the pulse is not important experimentally provided it is short enough to enable the separate echoes to be distinguished. From this

echo time diagram can be deduced any response, whether transient or steady state, as will be discussed in the next paragraph.

An echo time diagram is shown schematically in Fig. 1. In this diagram A is the start of the time base and at this instant the impulse of sound is transmitted. At B is the trace of the sound travelling direct to the microphone. At C is the first echo and D, E, etc., are later echoes. The length AB is proportional to the distance between the loudspeaker and the microphone and the distance AC is proportional to the distance between the nearest image and the microphone and so on.

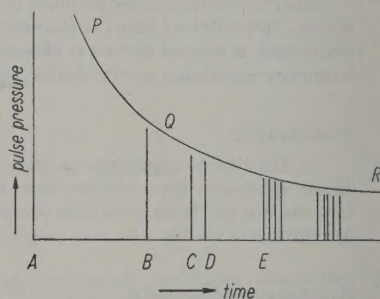


Fig. 1. Echo time diagram.

The ordinates of the curve PQR are inversely proportional to the time after the impulse is sent. Strictly speaking, the time is measured from the time of departure of the impulse from the equivalent point source, not the time of departure from the actual speaker diaphragm. The magnitude of each echo decreases inversely with time or distance as well as by air attenuation and reflection loss so that the echo pulses all lie below the curve PQR.

Suppose now that a continuous tone is sent from the speaker at constant level and starting abruptly at zero time. The resulting envelope oscilloscope diagram is as shown in Fig. 2 and may be deduced from Fig. 1 as follows: between B and C only the direct sound is received by the microphone and at C the first echo arrives. Whether this arrives in phase or not depends on the distance BC and the frequency. If the distance BC is a whole number of wavelengths the echo arrives in phase and the envelope is increased stepwise by an amount corresponding to the magnitude of the echo given in Fig. 1. If the distance BC is an odd multiple of the half wavelength the echo arrives in opposition and the envelope is decreased stepwise by the same amount. Thus from the echo time diagram is determined the relative phase of each echo at any given frequency and thus the diagram of Fig. 2 is constructed. This diagram gives the transient at the

start of a tone and after a long enough interval the steady state response at the frequency in question. A similar procedure gives the switch off transient. Thus from the echo time diagram can be deduced all the essential information about the studio including the transients both starting and stopping and the steady state response.

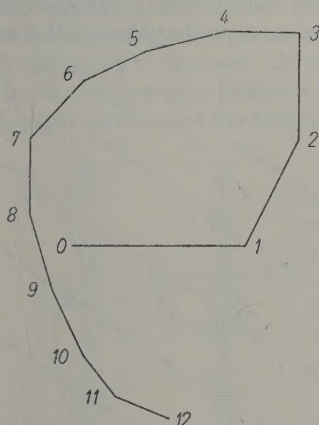


Fig. 1a. Vector diagram. Relating Fig. 1 to Fig. 2.

Fig. 1a is the vector diagram providing the link between the echo time diagram (Fig. 1) and the envelope diagram (Fig. 2). The vector 01 represents the direct sound pressure. The vector 12 is drawn to represent the first echo at C both in magnitude and phase. The magnitude is taken direct from the echo time diagram and the phase is computed from the time delay BC between the direct sound and the echo allowing for the frequency of the signal. Simi-

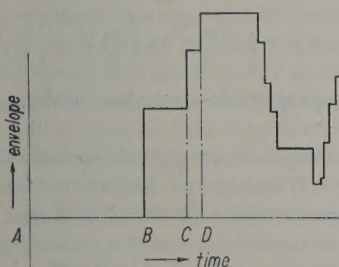


Fig. 2. Envelope diagram.

larly, the vector 23 represents the second echo and so on. The vector 02 represents the sum of the direct sound and the first echo and the vector 03 the sum of the direct sound and the first two echoes and so on. From this vector diagram is drawn the envelope diagram Fig. 2.

Many specimens of experimental observations of both Fig. 1 and Fig. 2 have been taken and a de-

scription of the apparatus and methods will be given elsewhere. If the auditorium is very irregular the echoes will be in random phase and no pattern will be detected in the echo time diagram, and the evaluation of the total response will have to be carried out by statistical methods [3]. There will be no favoured frequencies and the random variations will not be large. In the case of the rectangular room, however the characteristic frequencies and eigentones are evident as regularities of the echo time diagram.

2. 2. 0. The rectangular room

Suppose the dimensions of the rectangular room are α , β and γ respectively, and suppose for simplicity that the source is at one corner. Then the sound field in the room may be taken as that due to the source and its images in the walls of the room. Each image will itself have an image in the opposite wall and this again has its image and so on. The spacing of the images will be 2α , 2β and 2γ in the respective directions and the whole constitutes a rectangular array filling all space. In Fig. 3 are drawn a few of the images in the horizontal plane. In a plane 2γ vertically above this will be a similar set of images and this array is repeated at intervals 2γ up and down. There is a great deal of regularity in this array and the regularity may be observed in two ways. The images are observed to be in straight lines and also in planes in various directions.

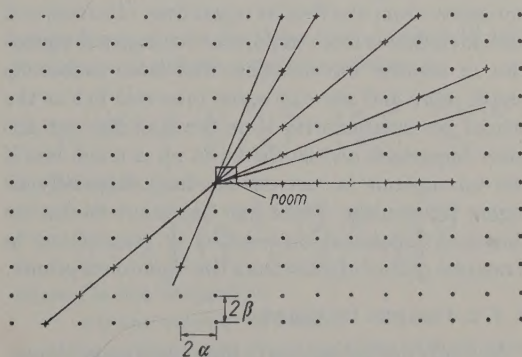


Fig. 3. Images in horizontal plane.

2. 2. 1. Line pattern

The most obvious lines are those parallel to the walls of the room but it will be seen that there are also diagonal lines. If a straight line is drawn through any two images, an infinite number of other images also lies on this line. Take, for example, the source and the image $n_1 2\alpha$ along, $n_2 2\beta$ across, and $n_3 2\gamma$ up. Then the image $2n_1 2\alpha$ along, $2n_2 2\beta$ across and

$2n_3 2\gamma$ up are on the same straight line. The distance between successive images on this line is

$$x = 2 \sqrt{(n_1 \alpha)^2 + (n_2 \beta)^2 + (n_3 \gamma)^2},$$

where n_1 , n_2 and n_3 are whole numbers without common factor. It is seen that on each line the images are equidistant and the distance is different for different lines.

Now consider one such line and draw the echo time diagram for a microphone on the line ignoring for the time being all echoes from other images. The echoes will arrive at equal time intervals, the interval being x divided by the velocity of sound a , and the echoes will give sound pressures inversely proportional to distance (or less allowing for reflection loss and absorption). For steady frequency input, if the wavelength is x or a submultiple of x all the echoes will arrive in phase and add directly to a large value, and in the absence of absorption the value tends to infinity. For other frequencies the echoes arrive out of phase and mutually cancel. The pulse response can be evaluated as a Fourier series and as might be expected contains all frequencies whose wavelengths are x or submultiples of x . The components are also inversely proportional to time. These frequencies are not resonance frequencies in the usual sense although they are characteristic frequencies in that the response is greater than at non-characteristic frequencies. The frequencies are not eigentone frequencies.

If the microphone is not on the line the echoes do not arrive from the first at equal time intervals and this deviation is more important for higher frequencies or shorter wavelengths. The later echoes do arrive more and more at equal intervals but as the echoes get smaller with time the first few are the more important and so the build up is much less if the microphone is not on the line, especially at higher frequencies. These line frequency modes are therefore dependent on position of microphone in a manner quite different from the eigentones proper.

2.2.2. Images in planes

Not only are the images in lines but also in planes. For example, if the source is on a floor corner there will be an infinite number of images in the ground plane as shown in Fig. 3. There will be a similar array of images on the horizontal plane 2γ above ground and in the horizontal plane 4γ above ground and so on. The distance between these planes is 2γ and the number of images per unit area in each plane is $1/4\alpha\beta$. Similarly the planes parallel to the $\beta\gamma$ wall of the room are distant 2α from one another and the number of images per unit area is $1/4\beta\gamma$.

The number of images per unit volume of space is $1/8\alpha\beta\gamma$, and clearly with any plane of images the number of images per unit area is proportional to the distance between planes.

The oblique planes are not so easy to understand without the use of analytical geometry but one oblique plane which is the vertical plane through the floor diagonal is shown with parallel planes in Fig. 4. The distance between the planes in this array is

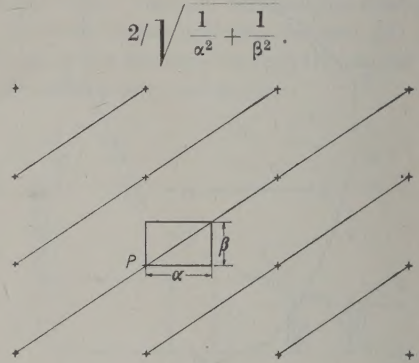


Fig. 4.

In Fig. 5 are drawn the traces of the vertical plane passing through the source and the image ($3 \times 2\alpha$, $4 \times 2\beta$), and traces of parallel planes are also drawn. The distance between the planes in this array is

$$2 / \sqrt{\left(\frac{4}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{3}{\beta}\right)^2}.$$

It can be shown by analytical geometry [4] that in the general case the distance between parallel planes is $\lambda = 2/q$

$$\text{where } q = \sqrt{\left(\frac{n_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{\gamma}\right)^2},$$

n_1 , n_2 and n_3 being whole numbers without common factor.

The number of images per unit area of such planes is $\lambda/8\alpha\beta\gamma = 1/4\alpha\beta\gamma q$ and the mean distance between images in such a plane is $2 \sqrt{\alpha\beta\gamma q}$.

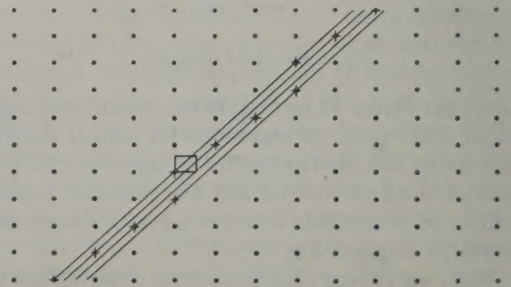


Fig. 5.

2.2.2.1. Effect of images in a plane

Now consider such a plane of images as heard at a distance. If the distance is small only the images nearest the microphone affect the initial wave front, for the wave front from other images arrives too late. As the distance increases the effect of each image decreases but wave fronts from more images arrive nearly enough in synchronism. The effect is that the wave front from the plane of images becomes flat and ceases to decrease with distance [5].

In Fig. 6, a, b, c etc. represent images in a plane normal to the paper and circles have been drawn about

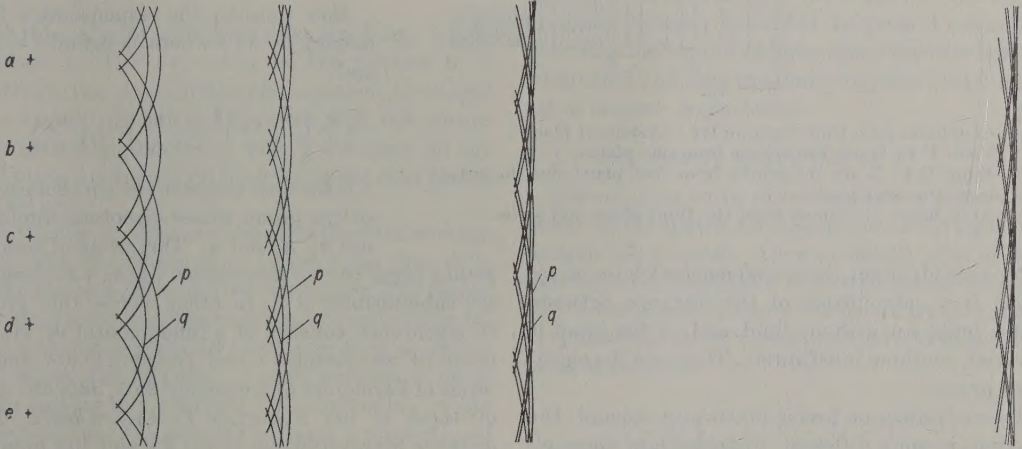


Fig. 6. Wave front at various distances from a plane array of sources. Circles "p" are great circle sections of the wave fronts from sources in the plane of the figure. Circles "q" are sections of wave fronts from sources above and below the plane of the figure.

these points as centre to represent the pulse waves by the time the wave fronts have travelled various distances. These circles represent the sections of the spherical wave fronts by the plane of the diagram, and other circles represent similar sections of the wave fronts from images not on the plane of the diagram. It will be seen that the total wave front from the plane of images rapidly becomes plane. The flatness of the wave front depends on the distance of the wave front from the plane of images compared with the distance between the images on the plane. It is to be noticed that although each image gives a

single impulse the plane of images gives a step function, for in Fig. 6, behind the wave front the space becomes uniformly filled. The corresponding echo time diagram ultimately becomes like Fig. 7. Instead of an impulse as in Fig. 1 at each echo there is a step corresponding to each plane of images, and the time between successive steps is the distance between successive parallel planes divided by the velocity of sound.

After a long enough interval the room is filled with a series of plane wave fronts. The distance between successive planes is the wavelength of the

lowest frequency which these wave fronts will support. Since the distance between planes is

$$\lambda = 2/q, \text{ where } q = \sqrt{\left(\frac{n_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{\gamma}\right)^2},$$

the lowest frequencies are

$$f = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{n_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{\gamma}\right)^2}$$

where f is the frequency,

a is the velocity of sound,

n_1, n_2 and n_3 are whole numbers without common factor.

Since all harmonics of these lowest modes are also possible, the frequencies supported by the regular arrangement of the images in planes are

$$f = \frac{ak}{2} \sqrt{\left(\frac{n_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{\gamma}\right)^2}$$

where k is any whole number giving the number of the harmonic of the

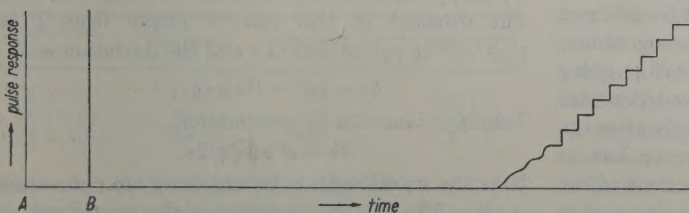


Fig. 7. Simplified equivalent echo time diagram for a system of planes.

series of frequencies supported by the system of planes in question. These are the eigentone frequencies [6].

Returning now to the echo time diagram, Fig. 8 shows a simplified schematic illustration of the returns from one set of planes. At intervals corresponding to the distance between planes, there is a stepwise increase in the number of single image wave fronts arriving which ultimately gives a configuration like Fig. 7.

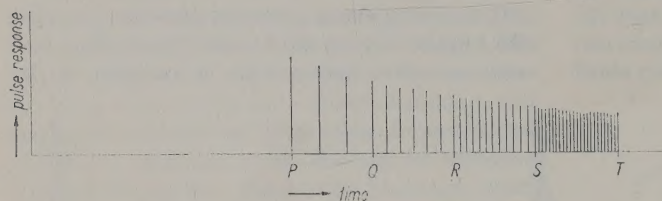


Fig. 8. Simplified echo time diagram for a system of planes.

From P to Q are the echoes from one plane.

From Q to R are the echoes from that plane plus the echoes from the next plane.

At R begin the echoes from the third plane and so on.

For a steady input those frequencies whose wavelength is a submultiple of the distance between planes build up without limit and, if the input is removed, continue indefinitely. These are the eigentones proper.

If, now, reflection loss is taken into account, the situation is quite different. Consider how these eigentones are excited by the impulsive sound from the loudspeaker. Before the wave fronts can excite and maintain any frequency, the distances between successive wave fronts must be sufficiently equal in relation to the wavelength, or the wave fronts must be sufficiently flat. This requires that the distance from the images to the wave fronts must be large compared with the spacing of the images in the plane. In other words, time is required before the wave fronts are sufficiently flat to delineate higher frequencies and particularly so in planes which are close together and therefore contain few images per unit area. During this relatively long time, there will have been many reflections and consequently large absorption so that sound is attenuated before the higher frequency eigentones can build up.

An approximate numerical figure can be obtained for the relative magnitude of the various eigentones as excited from a spherical source but before going on to this the total picture will be reviewed. Consider again the echo time diagram. Immediately after the input impulse the echoes arrive more or less at random depending on the relative positions of the source and the microphone. The echoes decrease in magnitude with time and increase in number and

soon sets of individual echoes appear in uniform time sequence. These give rise to transitory characteristic frequencies which decrease inversely with time and soon vanish. At this stage, another kind of regularity is observed among the echoes now very numerous. Large numbers of echoes arrive in groups very nearly simultaneously and the number in each group which arrives at nearly the same instant increases so as to compensate exactly for the smaller magnitude of individual echoes. This periodicity does not decrease except by absorption and gives the eigentone proper.

Now consider the response at a frequency $f = ka/\lambda$ where as before $\lambda = 2/q$ and

$$q = \sqrt{\left(\frac{n_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{\gamma}\right)^2}$$

λ is the distance between parallel planes of the group whose eigentone numbers are n_1 , n_2 and n_3 . This group of parallel

planes gives rise to frequencies whose wavelengths are submultiples of λ . In other words, this group of eigentones consists of a fundamental or lowest mode of wavelength λ and frequency a/λ and a series of harmonics of frequency $2a/\lambda$, $3a/\lambda$ etc. One of these is the frequency $f = ka/\lambda = kaq/2$. The distance between planes is $\lambda = 2/q$ and the number of images per unit area in each plane is $1/(4\alpha\beta\gamma q)$. The mean distance between images on the plane is thus $2\sqrt{\alpha\beta\gamma q}$.

Now consider the sound field at a point P distant s from one plane. In order to support exactly the required frequency the wave front from the plane of images should begin to arrive at P in time s/a . The wave front from the next plane should arrive λ/a later and the next $2\lambda/a$ and so on. Actually the wave front will arrive exactly on time only if there is an image in the plane exactly opposite P, that is at the foot of the normal from P to the plane. As the mean distance between images in the plane is $2\sqrt{\alpha\beta\gamma q}$ the actual distance from the nearest image to the foot of the normal from P to the plane will be $\sqrt{\alpha\beta\gamma q}$ where α is a number between 1 and 0. The distance of this nearest image from P is $\sqrt{(s^2 + \alpha^2 \alpha\beta\gamma q)}$ instead of s and the deviation is

$$\delta s = \sqrt{s^2 + \alpha^2 \alpha\beta\gamma q} - s.$$

Taking a binomial approximation

$$\delta s = \alpha^2 \alpha\beta\gamma q / 2s.$$

Now the wavelength with which we are concerned is $\lambda/k = 2/kq$ and the deviation of the wave front at P as a fraction of the wavelength is

$$\frac{x^2 \alpha \beta \gamma q}{2s} \cdot \frac{kq}{2} = \frac{x^2 \alpha \beta \gamma q^2 k}{4s}$$

This is an angular deviation of

$$\theta = \frac{2\pi x^2 \alpha \beta \gamma q^2 k}{4s}$$

To obtain a reasonable approximation, suppose that θ is less than $\pi/3$ or 60° so that the in phase contribution of the wave front is greater than 0.5 for the first few wave fronts. The average of x^2 is taken as $1/3$ so that

$$\frac{2\pi \alpha \beta \gamma q^2 k}{12s} < \frac{2\pi}{6} \quad \text{or} \quad s > \frac{\alpha \beta \gamma q^2 k}{2}$$

With this value of s the first wave front may be out of phase by 180° depending on the position of P relative to the plane. With oblique planes the images in one plane are not in alignment with the images in neighbouring planes so that if the error on the first plane is a maximum the error in the next planes will be less.

In the case of oblique planes therefore the average of the first few planes gives an error less than 50% on the response of those first few planes. The planes still more remote will have progressively smaller errors. The responses of all the planes form a geometric series, the response of each successive plane being smaller in a constant ratio depending on the reflection loss. The sum of the series is proportional to the first term. In the case of the simple modes (1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1) the images in successive planes are in alignment and consequently the errors on all successive planes are cumulative so that the result is dependent on the position of P relative to the source.

In the next section an approximation will be made of the different eigentones and here it will be sufficient to calculate for a few particular cases the distance s and the corresponding time $t = s/a$ that elapses before the eigentone begins to build up. Consider a room in which $\alpha = 24\text{m}$, $\beta = 15\text{m}$, $\gamma = 7.5\text{m}$. This represents a studio of 2700m^3 and the reverberation time would be of the order 1.5 s. The results are tabulated in Table I for a few eigentones.

Table I

eigentone number	frequency	distance s	time s/a
10, (1, 0, 0)	69 c/s	23.4 m	0.071 s
(10, 0, 1)	72 c/s	258 m	0.678 s
(0, 1, 10)	220 c/s	2400 m	7.3 s

Now consider a smaller studio say $6 \times 4.5 \times 3.6\text{m}^3$. In this the reverberation time would be about 0.4 s and the results are tabulated in Table II.

Table II

eigentone number	frequency	distance s	time s/a
10, (1, 0, 0)	275 c/s	13.5 m	0.041 s
(10, 0, 1)	280 c/s	139 m	0.42 s
(1, 0, 10)	460 c/s	378 m	1.15 s

2. 2. 2. Discussion of numerical results

In the larger studio in Table I the eigentone (0, 1, 10) of frequency 220 c/s requires 7.3 s before the wave fronts are sufficiently plane to begin to establish the eigentone pattern. By this time the attenuation by reflection is of the order 240 db. This eigentone is completely inaudible. In general terms it is clear that higher and oblique eigentones are heavily attenuated and only the lower frequency eigentones are of acoustic importance.

2. 2. 3. Eigentone space pattern

Before going on to state conclusions some statements on the spatial configurations of the eigentone pattern will be made. After a suitable lapse of time the studio will be filled with a large number of plane step wave fronts. These wave fronts travel normal to themselves at the speed of sound. Corresponding to each value of

$$q = \sqrt{\left(\frac{n_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{\gamma}\right)^2}$$

there will be in all eight sets of wave fronts. In each direction of four directions there will be two wave fronts travelling in opposite directions, thus creating a standing wave pattern. The total pattern consists in essence of a set of parallel travelling wave fronts at equal intervals plus a similar set travelling in the opposite direction plus all the reflections of these in the walls of the room [7]. These together constitute the spatial pattern corresponding to that eigentone, and the pattern is complicated for large values of q .

2. 2. 4. Excitation of individual eigentones

If it were required to excite immediately the simpler eigentones, for example, the (1, 0, 0) mode, it would be sufficient to drive one end wall of the room parallel to itself at the appropriate frequency but to excite a mode with high value of q would require a very complicated system of driving planes. Failing the simultaneous drive of all the appropriate planes time is required to establish the pattern and as is seen from the preceding, a relatively long time for high values of q .

Another way of looking at this is to consider the spherical impulse source not only as containing all

frequencies equally but also as containing all orientations equally. It is so to say impulsive not only in time but also in space. Since each eigentone has not only a specific frequency but also a specific orientation it follows that the degree of excitation of any eigentone depends not only on the frequency spectrum of the source but also on the polar diagram of the source.

Practical sound sources are of course not spherical but decidedly directional and the relative excitation of the eigentones depends largely on the orientation of the source or sources. Nevertheless any practical source, however directional, sounds like a spherical source at large distances and highly oblique high order eigentones will be only faintly excited even with highly directional sources.

2. 3. 0. Conclusions

We are now able to make a general picture of what happens in a rectangular studio when pulse excited and to deduce from this in general terms what happens when steady tone is switched on at any frequency. The results are best considered in three stages.

2. 3. 1. First stage

In this stage, the echoes are very few and large and there is as yet no periodicity imposed by the room. The interference patterns produced depend on the relative positions of the source and microphone.

2. 3. 2. Second stage

In this stage, the echoes are more numerous and smaller and the line pattern is noticeable giving rise to frequencies which however are not eigentone frequencies. These decay inversely as time whether or not there is absorption. These frequencies are in essence those causing the bulk of the audible effect of the studio. The rate of decay is characteristically not exponential. At the end of this stage the sound has generally decreased by thirty or forty decibels from the peak values.

2. 3. 3. Third stage

In this stage the echoes generally are arriving in groups nearly in synchronism from the various planes of images. These establish the eigentone pattern proper which is similar all over the room in distinction from the previous stages where the patterns were largely local. Owing to the time taken to establish these patterns, in a studio with usual absorption, the higher frequency eigentones are low in level and the highly oblique modes are virtually absent. The die away of this stage is characteristically exponential.

Steady-state characteristics

A true resonance can only be built up by a large number of echoes. This is implicit in the basic idea of frequency. As stated for example by GABOR [8] if frequency is known precisely epoch is completely indeterminate and conversely if epoch is known precisely frequency is indeterminate. The impulse is precisely known as to epoch and contains no specific frequency.

It requires an infinite series of impulses to determine a frequency precisely and more generally a sharply defined resonance requires a large number of echoes in regular sequence to define it. There is however another phenomenon which resembles a resonance in some respects but which is in effect quite different. With any particular location of source and microphone it may happen that the first few larger echoes give a zero or nearly zero total response. If the steady state characteristic is on a decibel basis, as is usual, at such frequencies there will be a deep narrow crevasse on the curve. This

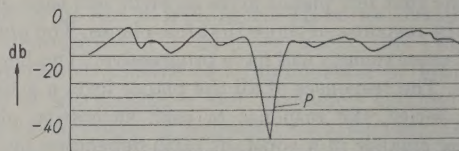


Fig. 9.

crevasse is not a resonance phenomenon in the usual meaning of the term. In Fig. 9 is shown a small section of a steady state characteristic for a typical studio. At P is a crevasse of this type. These crevasses are a prominent feature of steady state characteristic curves and it is on the other hand difficult to find any true resonance feature on the curve.

3. Mathematical section

3. 0. General

Suppose at the point P a velocity source of such a nature as to give at unit radius a positive unit pressure impulse [2]. This will be taken as unit source. From the source a pressure wave travels radially outwards with velocity a . The pressure at radius r will be

$$P(t) = \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{a}\right) \quad (1)$$

where $\delta(t - r/a)$ is zero for all values of t except r/a and such that

$$\int_0^{\infty} \delta\left(t - \frac{r}{a}\right) dt = 1. \quad (2)$$

In the notation of VAN DER POL if $V(p) \doteq P(t)^*$ or $V(p)$ is the "image" of $P(t)$

$$V(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{a}\right) dt = \frac{1}{r} p e^{-pr/a} \quad (3)$$

Since the input is represented by p this may be taken as

$$V(p) = pZ(p)$$

where $Z(p)$ is a transfer impedance ratio and the response to any other input

$$P_0(t) \doteq V_0(p) \text{ is} \\ V(p) = V_0(p)Z = V_0(p) \frac{1}{r} e^{-pr/a} \quad (4)$$

It is easily seen that this is the "image" of a solution of the equation for a velocity potential

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} - a^2 \nabla^2 \Phi = 0.$$

Since pressure is a scalar quantity

$$V_s(p) = \sum V_0(p) \frac{1}{r} e^{-pr/a} \quad (5)$$

gives the solution for a series of sources.

3.1.0. The rectangular box

3.1.1. Formal equations

Consider a rectangular box whose edges which meet at a point are taken as axes of rectangular coordinates and are α, β, γ respectively. Take as source the point $P(x_1, y_1, z_1)$ and observe the resultant field at $Q(x_2, y_2, z_2)$. The field will be taken as due to the source plus all its images in the walls of the box. Thus for unit impulse source

$$V(p) = \sum \frac{p \cdot \exp \left[-\frac{p}{a} \sqrt{(x_2 \pm x_1 \pm 2r_1\alpha)^2 + (y_2 \pm y_1 \pm 2r_2\beta)^2 + (z_2 \pm z_1 \pm 2r_3\gamma)^2} \right]}{\sqrt{(x_2 \pm x_1 \pm 2r_1\alpha)^2 + (y_2 \pm y_1 \pm 2r_2\beta)^2 + (z_2 \pm z_1 \pm 2r_3\gamma)^2}} \\ = \sum \frac{p \cdot \exp(-pr/a)}{r} \quad (6)$$

and

$$Z(p) = \sum \frac{\exp(-pr/a)}{r} \quad (7)$$

This is for the case of zero reflection loss or absorption. If reflection loss is taken as $e^{-\rho}$ per reflection then a factor $\exp[-(r_1 + r_2 + r_3)\rho]$ is required. If an equivalent loss as $e^{-\mu t}$ is taken to secure approximate results then

*) Either $V(p) \doteq U(t)$ or $U(t) \doteq V(p)$ is an abbreviation for

$$V(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} U(t) dt$$

which is well known to be equivalent to

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{pt} \frac{V(p)}{p} dp.$$

C being the Bromwich contour.

$$Z(p) = \sum \frac{\exp[-(p + \mu)r/a]}{r} \quad (8)$$

For any input $P_0(t) \doteq V_0(p)$ the response is

$$V(p) = V_0(p)Z \quad (9)$$

and if $P(t) \doteq V(p)$ the response in terms of time is formally

$$P(t) \doteq V(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{pt} \frac{V_0(p)}{p} Z dp \quad (10)$$

where the integral is the Bromwich integral.

The response to unit impulse is

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{pt} Z dp. \quad (11)$$

3.1.2. Solution of the formal equation

These equations (10) and (11) may be solved in various ways. The expansion in terms of the singular points of $Z(p)$ corresponding to Heaviside's partial fraction expansion gives results in terms of exponentials. The imaginary exponents of these terms correspond to the critical frequencies implied in $Z(p)$ and thus imposed by the rectangular box. The expansion thus consists in finding the singular points of $Z(p)$. Now considered as in circuit technique $Z(p) = \frac{1}{r} \exp[-(p + \mu)r/a]$ consists of a sum of time vectors of various phases. If an ordered set of these vectors coincide in phase so as to give an infinite sum, this constitutes a singularity of $Z(p)$. Now the source and its images constitute a rectangular array filling all space and these may be

grouped for summation either in lines or in planes. As stated before the grouping in planes gives the eigentone solutions and the grouping in lines gives the expansion in terms of the Fourier series for the sets of echoes. Having found the singular points the remainder of the formal solution consists in evaluating the residues corresponding to equations (10) and (11).

3.1.3. Symmetry

The rectangular array of images is symmetrical about the six planes which are the walls of the box. The development of this symmetry meets the condition of zero velocity normal to the walls of the box. Immediately after the initial pulse, however, the sound field in the box shows no symmetry or order. It is only after several reflections have taken place that order and symmetry appear and consequently specific characteristic periodicities. By this time x_1, x_2 etc. are small compared with $2\sqrt{(r_1\alpha)^2 + (r_2\beta)^2 + (r_3\gamma)^2} = m$ so that $Z(p)$ can be expanded by the binomial theorem approximately.

Taking $2r_1\alpha/m$, $2r_2\beta/m$, $2r_3\gamma/m = l_1, l_2, l_3$ respectively as the direction cosines of the line from the origin to the image ($2r_1\alpha$, $2r_2\beta$, $2r_3\gamma$)

$$Z(p) = \sum_m \frac{\exp[-(p+\mu)m/a]}{m} \cdot 64 Q$$

where

$$Q = \cosh \frac{(p+\mu)l_1x_1}{a} \cosh \frac{(p+\mu)l_1x_2}{a} \cosh \frac{(p+\mu)l_2y_1}{a} \\ \cdot \cosh \frac{(p+\mu)l_2y_2}{a} \cosh \frac{(p+\mu)l_3z_1}{a} \cosh \frac{(p+\mu)l_3z_2}{a}$$

neglecting terms in $1/m^2$.

In the final development $(p+\mu)$ takes some imaginary values so that these terms become the well known cosine space distribution terms of the field. To avoid carrying these terms throughout, make $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$. This corresponds to placing the source at one corner of the box and listening at the same corner. In this way all the cosine terms in Q are unity or in other words all possible frequencies can be excited and all excited frequencies can be heard.

With source or listening point anywhere else some component frequencies will not be excited and some excited frequencies will not be heard. Making this simplification $Z(p)$ becomes (12)

$$Z(p) = 64 \frac{\exp\{-(p+\mu)/a\} \sqrt{(2r_1\alpha)^2 + (2r_2\beta)^2 + (2r_3\gamma)^2}}{\sqrt{(2r_1\alpha)^2 + (2r_2\beta)^2 + (2r_3\gamma)^2}}$$

In this case the source and its first seven images which are coincident with it together form a virtual source eight times greater and similarly the microphone is multiplied eight times. This accounts for the factor 64.

It is to be remembered that this symmetry is not evident during the first phase immediately after the input and this will be investigated later.

3.1.4. Expansion in terms of line frequencies

Taking eq. (12) and grouping in lines

$$\frac{Z(p)}{64} = \sum_m \sum_k \frac{\exp[-(p+\mu)2km/a]}{2km}$$

where $m^2 = (r_1\alpha)^2 + (r_2\beta)^2 + (r_3\gamma)^2$ and r_1, r_2, r_3 take all sets of positive integral values without common factor, including zero for any two in any set. For example $r_2 = r_3 = 0$, $r_1 = 1$ gives the term

$$\sum_k \frac{\exp[-(p+\mu)2k\alpha/a]}{2k\alpha}$$

Now

$$-p \frac{d}{dp} \frac{Z(p)}{64} = \frac{p}{a} \sum_m \sum_k \exp[-(p+\mu)2km/a]$$

$$= \frac{p}{a} \sum_m \frac{1}{1 - \exp[-2(p+\mu)m/a]} \quad (13) \\ \div \sum_n \frac{e^{-\mu t}}{2m} \left(1 + 2 \sum_k \cos \frac{ka\pi t}{m} \right).$$

$$\text{Now if } f(p) \div h(t) = p \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt \\ -p \frac{d}{dp} \frac{f(p)}{p} = p \int_0^\infty e^{-pt} t h(t) dt \\ \div t h(t).$$

$$\text{Thus } V(p) = 64 \sum_m \frac{e^{-\mu t}}{2mt} \left(1 + 2 \sum_k \cos \frac{ka\pi t}{m} \right)$$

$$\text{where } m = \sqrt{(r_1\alpha)^2 + (r_2\beta)^2 + (r_3\gamma)^2} \quad (14)$$

and r_1, r_2, r_3 are integers without common factor.

This we shall call the Fourier series expansion of the response in terms of successive echoes. It is seen that the factor $1/t$ makes these periodicities fugitive. The frequencies are not eigentone frequencies.

It is now to be observed that as heard from the origin the echoes in all these series arrive at equal time intervals so that the result of eq. (14) is correct. At other points where in general the listening point is not in the line of images making up the series, the echoes will not arrive from the first at equal time intervals but the deviation from equality rapidly decreases with time. The deviation is more important at higher frequencies where a given time deviation represents a greater phase deviation. Thus a longer time must pass before the higher frequencies develop, and owing to the factors $t^{-1} e^{-\mu t}$ the higher frequencies are reduced. At specific locations for source and listening point, where the listening point is on the line of images concerned, this reduction no longer holds.

In general these line frequencies are dependent on the relative positions of source and listening point in a manner quite different from the eigentones proper. The eigentone field apart from the arrangement of nodal and loop planes is uniform over the room whereas the line frequency field is decidedly a function of position of source and microphone.

3.1.4.1. Closer approximation of absorption

In the case of the line periodicities a closer approximation may be made for the absorption than the assumption of attenuation as $e^{-\mu t}$. Suppose at each reflection a reflection loss as $e^{-\rho}$. Then clearly successive terms in the line series will be attenuated as $\exp[-(n_1 + n_2 + n_3)\rho]$. Thus from eq. (12)

$$\frac{V(p)}{64} \sum_m \sum_k P \frac{\exp(-2pkm/a)}{2km} \cdot \exp[-(n_1 + n_2 + n_3)\rho k]. \quad (15)$$

Then finally

$$P(t) = 64 \sum_m \frac{\exp(-napt/2m)}{2mt} \left(1 + \sum_k 2 \cos \frac{\pi ka}{m} t \right).$$

This is the same as (13) except that μ is replaced by

$$\mu' = \frac{n\alpha\rho}{2m} = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)\alpha\rho}{2\sqrt{(n_1\alpha)^2 + (n_2\beta)^2 + (n_3\gamma)^2}}. \quad (16)$$

3.1.4.2. Sinusoidal input

The response to sinusoidal input could be deduced

from eq. (12) by putting $u_0 = \sin \omega t \div i_0 = \frac{P\omega}{P^2 + \omega^2}$ so that

$$V(p) = \frac{P\omega}{P^2 + \omega^2} Z(p).$$

It is, however, easier and more illuminating to proceed as follows. From eq. (6) can be deduced the magnitude and epoch of echo. Suppose the input is $\sin \omega t$ and the frequency corresponds to one of the line frequencies. Then depending on the positions of the source and the microphone, certain of the echoes will arrive at equal time intervals corresponding to

$$\frac{2m}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{(n_1\alpha)^2 + (n_2\beta)^2 + (n_3\gamma)^2}. \quad (17)$$

The effect of these will be summed since they arrive in phase. The remaining echoes will arrive at random so far as this frequency is concerned and their effect can be estimated statistically as will be seen later.

In the simpler case of the source at one corner and the listening point at the same corner and omitting the direct sound, the series to be added is

$$Q = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2mk} e^{-km\rho} = \frac{1}{2m} \log(1 - e^{-n\rho}).$$

There are, however, in this case eight sets of images in lines which also contribute, the co-ordinates of these being $\pm 2n_1\alpha$, $\pm 2n_2\beta$, $\pm 2n_3\gamma$, thus

$$Q = -(4/m) \cdot \log(1 - e^{-n\rho}). \quad (17a)$$

The next step is to obtain an approximation for the sum of the random phase echoes for the sake of comparison with these values and later with the eigentone values. This will be pursued in the next paragraph.

3.1.5. Random phase summation*

Suppose the phase of the various echoes at any given frequency is taken as random. Then the sum

* The argument which follows is derived from HORNER'S paper (reference [3]).

of the components in phase with and in quadrature with a given arbitrary vector are

$$x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 + \dots,$$

$$y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 + \dots$$

therefore $x^2 + y^2 = \Sigma a_1^2 + \Sigma a_s a_t \cos \theta_s \cos \theta_t + \Sigma a_s a_t \sin \theta_s \sin \theta_t$.

The mean square value is the mean of $x^2 + y^2$ over all values of $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, which is

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2) d\theta_n = \Sigma a_s^2$$

since the integration of all the cosine and sine terms gives zero.

Thus the vectors in random phase add as if in quadrature to give the mean square value. The R. M. S. value is the square root of this. This is on the basis that the numerical value of the echo is independent of the phase. This is not strictly true, especially at low frequencies, but the result is probably reasonably accurate since although the magnitude and phase are related they are not related in any regular way as for example if increase of r always corresponded to an increase of θ_1 .

Now a_s may be expressed as

$$a_s \div \frac{1}{r_s} e^{-\mu r_s/a}.$$

Here μ is an average decrement figure related to the average reverberation time of the studio in question by the equation $\mu = 6.9/\tau$ where τ is the reverberation time.

In the case of a rectangular studio, two cases are to be considered.

1. When the source or the microphone is near a corner of the room. "Near" means that the distance from the corner is small compared with the wavelength considered.
2. Other cases.

Case 1. In this case the source and the first seven echoes are close together and make virtually a single composite source. The room corner acts as a horn. In this case the number of images per unit volume is $n = 1/8 V = 1/8 \alpha \beta \gamma$ where V is the room volume.

In time t the sound has travelled a distance $at = r$ and all images inside a sphere of radius r and volume $\frac{4}{3}\pi r^3$ will have been heard. The rate of arrival of echoes is

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{1}{8V} \right) = \frac{\pi r^2}{2V} a \text{ or } \frac{\pi r^2}{2V}$$

per unit of length.

Hence the mean square sum of all the echoes is

$$\bar{e}^2 = \int_{r_1}^{\infty} \frac{\pi}{2V} e^{-2\mu r/a} dr = \frac{a\pi}{4\mu V} \cdot e^{-2\mu r_1/a}. \quad (18)$$

Taking the direct sound at unit distance as unity and including in this direct sound all the group of the composite source, " r_1 " is the range of the nearest other echo. Since μ is small in practice r_1 need not be accurately estimated.

Case 2. In this case

$$e^2 = \frac{2a\pi}{\mu V} \cdot e^{-\mu r_1/a} \quad (19)$$

again taking direct sound at unit distance as unity.

3.1.6. Expansion in terms of eigentones

In the case of the source at the origin the images will be at the points $\pm 2r_1\alpha$, $\pm 2r_2\beta$, $\pm 2r_3\gamma$.

The number of images per unit volume is $1/8\alpha\beta\gamma$.

Now consider the plane

$$\frac{n_1 x}{\alpha} + \frac{n_2 y}{\beta} + \frac{n_3 z}{\gamma} = 0$$

where n_1, n_2, n_3 are integers without common factor. It is easy to see that an infinite number of images lie on this plane.

Let

$$q^2 = \left(\frac{n_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{\gamma}\right)^2$$

then l, m, n , the direction cosines of the plane are $n_1/\alpha q$, $n_2/\beta q$, $n_3/\gamma q$ respectively.

Now consider the point $r_1 2\alpha$, $r_2 2\beta$, $r_3 2\gamma$.

The distance of this point from the plane is

$$s = 2lr_1\alpha + 2mr_2\beta + 2nr_3\gamma = \frac{2}{q} (r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3).$$

Since r_1, r_2, r_3 are any positive or negative integers $r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3$ can have any integral value and the lowest value of s is thus $2/q$.

Through this nearest point to the plane the equation of the parallel plane is

$$lx + my + nz = 2/q.$$

This plane also contains an infinite number of images. Thus the images may be grouped in a system of parallel planes, distant $2/q$ from one another as expressed by the equation

$lx + my + nz = 2k/q$ where k is any positive integer.

or
$$\frac{n_1 x}{\alpha q} + \frac{n_2 y}{\beta q} + \frac{n_3 z}{\gamma q} = \frac{2k}{q} \quad (20)$$

with the same value of q and therefore the same spacing, there are four sets of such planes

$$\frac{n_1 x}{\alpha q} \pm \frac{n_2 y}{\beta q} \pm \frac{n_3 z}{\gamma q} = \frac{2k}{q}.$$

These are actually one plane plus all its reflections in the walls of the box.

There will be another similar set of planes for each value of q , that is for all sets of values of n_1, n_2, n_3 .

The distance between planes is $s = 2/q$ and the number of ... ages per unit volume is $1/8\alpha\beta\gamma$ and

thus the number of images per unit area of each plane is

$$n = 1/4\alpha\beta\gamma q. \quad (21)$$

The average distance between images in the plane is $2/\sqrt{\alpha\beta\gamma q}$.

In general the images in a plane will lie at the corners of a parallelogram lattice. The normal to the plane drawn through one image does not, in general, pass through images in other planes. That is, the images are not, in general, aligned normal to the planes.

The maximum distance of any point in a plane from the nearest image is taken as

$$r_1 = \sqrt{\alpha\beta\gamma q}. \quad (22)$$

It is now required to find an expression for the field due to the images in one such plane.

3.1.6.1. Field due to images in a plane

Consider first a plane with the discrete images replaced by a large number of small images but with the same density per unit area. Then by direct integration the pressure at distance s normal to the plane is

$$\begin{aligned} V(p)s &= \int_0^\infty p \frac{\exp\left(-\frac{P}{a}\sqrt{r^2+s^2}\right)}{\sqrt{r^2+s^2}} \cdot \frac{2\pi r dr}{4\alpha\beta\gamma q} \\ &= \frac{2a\pi e^{-Ps/a}}{4\alpha\beta\gamma q}. \end{aligned} \quad (23)$$

This represents a plane wave of magnitude independent of s .

If instead of impulsive input the input is

$$\cos \omega t \div \frac{p^2}{p^2 + \omega^2}$$

then the response is

$$\begin{aligned} V(p)z &= \int_0^\infty \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \frac{\exp\left(-\frac{P}{a}\sqrt{r^2+s^2}\right)}{\sqrt{r^2+s^2}} \cdot \frac{2\pi r dr}{4\alpha\beta\gamma q} \\ &= \frac{2a\pi e^{-Ps/a}}{4\alpha\beta\gamma q} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\div \frac{2a\pi}{4\alpha\beta\gamma q} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega \left(t - \frac{s}{a}\right). \quad (25)$$

If the limits are taken r_1 to ∞

$$V(p) = \frac{2a\pi}{4\alpha\beta\gamma q} \exp\left(-\frac{P}{a}\sqrt{s^2+r_1^2}\right). \quad (26)$$

In front of a hole in the infinite plane the response remains equal in magnitude but is delayed a distance

$$\delta s = \sqrt{s^2 + r_1^2} - s.$$

3.1.6.2. Approximation for discrete images

Now consider the error involved in taking this integral for the uniform plane source instead of the correct sum for the discrete images.

For large values of s the difference is that behind the wave front the pressure is uniform in the integral case whereas in the case of the discrete images it is non-uniform.

It is, however, precisely this non-uniformity which constitutes the recurring pattern giving rise to eigentones other than the one now considered.

For small values of s the wave front is no longer exactly plane and is delayed except exactly opposite an image.

3.1.6.3. Case of no absorption

In the case of zero absorption s can be made arbitrarily large since the field from the plane does not diminish with distance. Ultimately the box is filled with a whole series of plane wave fronts and these constitute the eigentone pattern.

3.1.6.4. Time taken for eigentone to develop

As stated above, for small values of s the wave front is no longer plane and the importance of the deviation from flatness depends on the wavelength of the sound being considered. When the wave front is sufficiently flat, successive wave fronts arrive sufficiently in phase to add and give a large cumulative result. An approximation will now be made to the time required for the wave fronts to be sufficiently flat to support any specific frequency.

From any point P distant s from one plane, draw the normal to the plane. The distance of the nearest image in the plane from the foot of this normal cannot exceed $\sqrt{\alpha\beta\gamma q}$ by (22). In the general case the distance in the next plane will differ and the distance can be written

$$r_1 = x\sqrt{\alpha\beta\gamma q} \text{ where } x < 1.$$

Hence the distance from P to the nearest image in the plane is $\sqrt{s^2 + x^2\alpha\beta\gamma q}$ and the deviation from s is $\sqrt{s^2 + x^2\alpha\beta\gamma q} - s = \delta s$.

Approximating

$$\delta s = \frac{x^2\alpha\beta\gamma q}{2s}. \quad (27)$$

Now for any value of q there are, as stated before, four sets of planes of images. From each plane of images there is a wave front in both directions so that there are in all eight sets of wave fronts. In each direction the two wave fronts travelling in opposite directions set up a standing wave pattern. This constitutes the eigentone pattern. The first wave front

to be considered as sufficiently plane to build up the pattern will consist of the sum of two oppositely travelling wave fronts and so on. The average value of x^2 may be taken as $1/3$ so that

$$\delta s_{\text{aver.}} = \frac{\alpha\beta\gamma q}{6s}. \quad (28)$$

Now consider a frequency in the harmonic series of eigentones for which the value q applies.

The wavelength of the fundamental is $2/q$ and the wavelength of the k th harmonic is thus $2/qk$. In order that the wavefronts may build up at this frequency and wavelength, δs must be small compared with $2/qk$. If, for example, δs is $1/6$ wavelength on the average, then for the first few planes the actual phase error will vary between 180° and zero so that for q large and consequently successive planes near together the sum of the first few terms will tend to have a zero in phase component. It is reasonably certain, therefore, that this value of δs is near the upper limit.

Taking this value of $\delta s < \frac{2}{6qk}$

$$\delta s = \frac{\alpha\beta\gamma q}{6s} < \frac{2}{6qk} \text{ and } s > \frac{\alpha\beta\gamma q^2 k}{2}. \quad (29)$$

This value of s as stated above is near the lower limit for s .

If δs is taken as $1/12$ wavelength the error varies from 0 to 90° averaging 30° with an inphase defect of about 13%.

Thus s may be taken greater than $\alpha\beta\gamma q^2 k/2$ and less than $\alpha\beta\gamma q^2 k$.

From this the time that must elapse before an eigentone begins to build up is greater than

$$\frac{\alpha\beta\gamma q^2 k}{2a}. \quad (30)$$

3.1.6.5. Summation of eigentone series

From eq. (23) the pressure from the plane is

$$\frac{2a\pi}{4\alpha\beta\gamma q} \cdot e^{-ps/a}.$$

The next plane is more distant by a distance $2/q$ and so on. Allowing for the series of wave fronts travelling in the opposite direction, the sum is

$$\begin{aligned} & \frac{a\pi}{\alpha\beta\gamma q} \cdot e^{-ps/a} \left(1 + e^{-2p/aq} + e^{-4p/aq} + \dots \right) \\ &= \frac{a\pi}{\alpha\beta\gamma q} \cdot e^{-ps/a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2p/aq}}. \end{aligned} \quad (31)$$

The time function corresponding to this is

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a\pi}{\alpha\beta\gamma q} \cdot e^{-ps/a} \cdot \frac{1}{p(1 - e^{-p/aq})} dp.$$

The zero frequency term tends to infinity owing to the nature of the impulse input and the total absence of absorption, and the response at other frequencies is

$$P(t) = \sum_k \frac{\sin kaq\pi}{\alpha\beta\gamma qk} \left(t - \frac{s}{a} \right), t > \frac{s}{a}.$$

That is, the fundamental of each set of eigentones corresponding to any value of q is inversely as frequency and in each harmonic set the components are also inversely as frequency.

3.1.6.5.1. Summation allowing for absorption

In the first instance allow absorption as $e^{-\mu t}$ where μ is a general average figure which may be derived from the average reverberation time of the studio as follows: The reverberation time is the time taken for the sound pressure to fall 1000 times so that if τ is the reverberation time

$$e^{-\mu\tau} = \frac{1}{1000} = e^{-6.9} \text{ and } \mu = \frac{6.9}{\tau}.$$

Then eq. (31) becomes

$$V(p) = \frac{a\pi}{\alpha\beta\gamma q} \cdot e^{-ps/a} \cdot e^{-\mu s/a} \frac{1}{1 - e^{-(2p+\mu)/aq}}$$

$$\text{and } P(t) = \sum_k e^{-\mu s/a} \cdot e^{-\mu t} \cdot \frac{\sin kaq\pi}{\alpha\beta\gamma qk}$$

approximately.

Now $\frac{s}{a} = \frac{\alpha\beta\gamma q^2 k}{2a}$ by (30) so that the numerical

magnitude of the term of frequency $kaq/2$ is

$$\frac{e^{-\mu\alpha\beta\gamma q^2 k/2a}}{\alpha\beta\gamma qk} \cdot e^{-\mu t}. \quad (32)$$

3.1.6.5.2. Second approximation for reflection loss

In the plane

$$\frac{n_1 x}{\alpha} + \frac{n_2 y}{\beta} + \frac{n_3 z}{\gamma} = \frac{2n}{q}$$

the important contributions to the wave front in the box are from the images angularly near the foot of the normal from the origin to the plane. The equations to this normal are

$$\frac{\alpha q}{n_1} x = \frac{\beta q}{n_2} y = \frac{\gamma q}{n_3} z = d.$$

Hence $r_1 + r_2 + r_3$ is approximately

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{s}{2q} \left(\frac{n_1}{\alpha^2} + \frac{n_2}{\beta^2} + \frac{n_3}{\gamma^2} \right)$$

(where s is the normal distance of the plane)

$$= \frac{at}{2q} \left(\frac{n_1}{\alpha^2} + \frac{n_2}{\beta^2} + \frac{n_3}{\gamma^2} \right) = \frac{ag}{2q} \cdot t$$

where

$$g = \frac{n_1}{\alpha^2} + \frac{n_2}{\beta^2} + \frac{n_3}{\gamma^2}$$

$$\text{and } q^2 = \left(\frac{n_1}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{n_3}{\gamma} \right)^2.$$

The reflection loss is taken as $e^{-\rho}$ per reflection and for $r_1 + r_2 + r_3$ reflections

$$e^{-(r_1 + r_2 + r_3)\rho} = e^{-ag\rho t/2q} = e^{-\mu' t}.$$

In equation (32) replace μ by $ag\rho/2q$.

Thus the numerical magnitude of the term of frequency $kaq/2$ becomes

$$\frac{e^{-\alpha\beta\gamma qk g \rho/4}}{\alpha\beta\gamma qk} \cdot e^{-\mu' t}. \quad (33)$$

3.1.6.6. Response to sustained sinusoidal input

This could be calculated from the general equations but it is easier to proceed as follows. Suppose the input is $\cos \omega t$ starting abruptly at zero time. Suppose $\omega = kaq\pi$, that is, the frequency of the k th harmonic of the series of which q determines the system of planes.

The response from a plane array of images is

$$V(p) = \frac{2a\pi}{4\alpha\beta\gamma q} \cdot e^{-ps/a} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \text{ from (24).}$$

Allowing for absorption as $e^{-\mu t}$

$$V(p) = \frac{2a\pi}{4\alpha\beta\gamma q} \cdot \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{(p + \mu)} \cdot e^{-(p + \mu)s/a}.$$

Up to the point where $s > \alpha\beta\gamma q^2 k/2a$ the echoes add at random and after this add in order to give the total

$$\begin{aligned} & \frac{a\pi}{\alpha\beta\gamma q} \cdot \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{p + \mu} \cdot e^{-(p + \mu)s/a} \cdot \\ & \cdot (1 + e^{-2(p + \mu)/aq} + e^{-4(p + \mu)/aq} + \dots + \dots) = \\ & = \frac{a\pi}{\alpha\beta\gamma q} \cdot \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{p + \mu} \cdot e^{-(p + \mu)s/a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2(p + \mu)/aq}}. \end{aligned}$$

The steady-state response from this is

$$P(t) = \frac{a\pi}{\alpha\beta\gamma q} \cdot \frac{e^{-\mu s/a}}{1 - e^{-2\mu/aq}} \cdot \frac{\mu \cos \omega t - \omega \sin \omega t}{\omega^2 + \mu^2}. \quad (34)$$

Taking μ small compared with ω this is approximately

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{a\pi}{\alpha\beta\gamma q} \cdot \frac{e^{-\mu s/a}}{1 - e^{-2\mu/aq}} \cdot \frac{\sin kaq\pi}{kaq\pi} \quad (35) \\ &= \frac{1}{Vq^2k} \cdot \frac{e^{-\mu s/a}}{1 - e^{-2\mu/aq}} \sin kaq\pi \end{aligned}$$

and inserting values of μ and s

$$= \frac{1}{Vq^2k} \cdot \frac{e^{-Vkgq\rho/4}}{1 - e^{-g\rho/q^2}} \sin kaq\pi. \quad (36)$$

3.1.7. Summary

The results for the simple case of the source at a corner and the listening point at the same corner may now be summarised.

There are three results and in each the response is given as a fraction of the direct pressure at unit distance from the source. The direct sound pressure is taken as the sound from the virtual source eight times greater than the actual physical source owing to the seven coincident images.

3.1.7.1. R. M. S. value on basis of random phase

$$R(z) = \frac{a\pi}{4V\mu} \cdot e^{-2\mu r_1/a} \text{ by (18)}$$

where r_1 is the minimum radius outside which the summation is taken.

3.1.7.2. Line frequencies

$$L(z) = \frac{4}{m} \log(1 - e^{-n\rho}) \text{ by (17a) where}$$

$$m^2 = (n_1\alpha)^2 + (n_2\beta)^2 + (n_3\gamma)^2 \text{ and } n = n_1 + n_2 + n_3.$$

The frequency is ka/m .

3.1.7.3. Eigentone frequencies

$$E(z) = \frac{1}{Vq^2k} \cdot \frac{e^{-Vkgq\rho/4}}{1 - e^{-g\rho/q^2}} \text{ by (36)}$$

where V = room volume = $\alpha\beta\gamma$

$q^2 = \left(\frac{n_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{\gamma}\right)^2$, $g = \frac{n_1}{\alpha^2} + \frac{n_2}{\beta^2} + \frac{n_3}{\gamma^2}$
 r is the order of harmonic in the series based on q so that the eigentone frequency is $kaq/2$.

3.1.8. Numerical results

To see clearly the significance of these results, the results are computed for two average studios at various frequencies. These are tabulated in Table III.

3.1.9. Effect of position of source and microphone

The effect of the positions of source and listening point differs in the three phases considered and can best be taken into account by a general review of the successive phases of the sound field after a signal is sent from the source.

3.1.9.1. First phase

During the phase immediately after the signal starts, there is no order or symmetry about the field

Table III

studio	α [m]	β [m]	γ [m]	τ [s]	μ [s ⁻¹]	ρ
studio A	24	15	7.5	1.5	4.6	0.12
studio B	6	3.8	2.4	0.4	17.25	0.13

Eigentones

studio	n_1	n_2	n_3	k	frequency	relative pressure
A	1	0	0	20	137.5	0.025
A	20	0	1	1	137.6	0.56×10^{-4}
A	0	0	1	20	440	0.59×10^{-4}
A	1	0	20	1	440	0
B	1	0	0	10	244	0.015
B	10	0	1	1	283	0.024
B	0	0	1	10	688	0.007
B	1	0	10	1	688	6.9×10^{-8}

Line frequency values

studio	n_1	n_2	n_3	k	frequency	relative pressure
A	1	0	0	20	137.5	0.0136
A	1	1	1	20	127	0.0069
B	1	0	0	10	274	0.0525
B	1	1	1	10	220	0.0217

R.M.S. values (excluding direct sound)

studio A	0.0012
studio B	0.0195

and the successive echoes add or mutually cancel in a manner highly dependent on the relative positions of the source and microphone. This gives rise to interference patterns showing apparent resonances which, however, are a function of source and microphone position relative to the room rather than a function of the room itself. A little later the R. M. S. random sum of echoes tends towards a value less dependent on frequency but the sum of this with the direct sound still remains highly variable with frequency and relative positions of source and microphone.

3.1.9.2. Second phase

In this phase the line frequencies begin to be evident in certain relative positions of source and microphone. The dependence on position is much less than in phase 1. These frequencies are related to the room dimensions but are not eigentones. They decrease inversely as time and not exponentially as do the eigentones proper.

3.1.9.3. Third phase

In this phase the eigentones begin. These are dependent on position in the sense that there is a regular pattern of nodal and loop planes. They are independent of position, however, in the sense that any nodal point is as good as any other for the

microphone position. The origin is a convenient analytical position because it is a nodal point for all modes.

As remarked earlier, the position of the source has another effect. If, for example, the source is at the geometric centre of the room then the number of images is eight times greater and the planes are at half the distance from one another. Thus, for a frequency $kaq/2$ with the same values of n_1, n_2 and n_3 as before, the number of images per plane is four times greater and the spacing half so that for the same frequency the order of harmonic is halved. The fundamental and odd harmonics of the original eigentones are not excited. The eigentones are as if for a room of half the linear dimensions of the actual room. The distance s is thus halved and the attenuation of the higher eigentones is less.

Space does not permit a more detailed consideration of the effect in general of source and listening positions but the methods outlined above can be used to compute the effect with any specific arrangements.

Appendix

Velocity source required for a given pressure wave

The equation to be solved is

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} - a^2 \nabla^2 \Phi = 0. \quad (1)$$

From spherical symmetry Φ is a function of r only so that the equation may be written

$$\frac{d^2}{dt^2} (r\Phi) - a^2 \frac{d^2}{dr^2} (r\Phi) = 0. \quad (2)$$

Following the method of VAN DER POL, multiply by e^{-pt} and integrate between limits 0 and ∞ .

Denote $p \int_0^\infty e^{-pt} (\Phi) dt$ by $\Psi(p)$ so that $\Psi(p) \doteq \Phi(t)$.

Then integrating by parts

$$p^2(r\Psi) - a^2 \frac{d^2}{dr^2} (r\Psi) = \left[p \frac{d}{dt} (r\Phi) + p^2(r\Phi) \right] t = 0.$$

Now initially all is at rest so that $\frac{d}{dt} (r\Phi) = 0, r\Phi = 0$ and

$$r\Psi = \frac{a^2}{p^2} \cdot \frac{d^2}{dr^2} (r\Psi)$$

and

$$r\Psi = A \cdot e^{-pr/a} + B \cdot e^{pr/a} \quad (3)$$

where A and B are independent of r .

Now suppose at radius α a spherical shell constrained to move with radial velocity $U_0(t) \doteq i_0(p)$ the displacement supposed small. This shell represents the velocity source. Since the shell is constrained what happens inside the shell has no effect

outside the shell and consequently only the outgoing wave from the shell need be considered.

$$\text{Thus} \quad r\Psi = A \cdot e^{-pr/a} \quad (4)$$

where A is to be determined.

Now if $P(t) \doteq V(p)$ represent the pressure and $U(t) \doteq i(p)$ represent the velocity

$$i(p) = \frac{d\Psi}{dr} = - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{p}{ar} \right) A \cdot e^{-pr/a} \quad (5)$$

$$\text{and} \quad V(p) = -p \rho \Psi = - \frac{p \rho A}{r} \cdot e^{-pr/a}. \quad (6)$$

$$\text{Now} \quad [i(p)]_{r=\alpha} = - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{p}{a\alpha} \right) A \cdot e^{-p\alpha/a}$$

and this is equal to $i_0(p)$. Now taking zero of time not on the shell but from the time at which the wave would have passed the centre of the sphere the initial velocity is

$$i_0(p) e^{-p\alpha/a}$$

$$\text{so that} \quad i_0(p) = - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{p}{a\alpha} \right) A. \quad (7)$$

Also suppose

$$V(p) = V_0(p) \frac{1}{r} \cdot e^{-pr/a} \doteq P_0(t) \frac{1}{r} \delta \left(t - \frac{r}{a} \right).$$

$$\text{Then} \quad A = - \frac{V_0(p)}{p \rho}$$

$$\text{and} \quad i_0(p) = \left(\frac{1}{r\alpha^2} + \frac{1}{a\alpha} \right) \frac{V_0(p)}{\rho} \quad (8)$$

$$\text{and} \quad U_0(t) = \frac{1}{\rho a \alpha} P_0(t) + \frac{1}{\rho \alpha^2} \int_0^t P_0(t) dt. \quad (9)$$

This gives the velocity input at radius α to generate any particular pressure wave.

Acknowledgement

The author is indebted to the Chief Engineer of the British Broadcasting Corporation for permission to publish this article.

(Received 24th May, 1951.)

References

- [1] VAN DER POL, B., Discontinuous phenomena in radio communication, *J. Instn elect. Engrs* **81** [1937], 386.
- [2] See appendix.
- [3] HORNER, F., A problem on the summation of simple harmonic functions of the same amplitude and frequency but of random phase. *Phil. Mag.* **37** [1946], 266, also present paper section 3. 1. 5.
- [4] See section 3. 1. 6.
- [5] See sections 3. 1. 6. 1 and 3. 1. 6. 2.
- [6] Lord RAYLEIGH, The theory of sound, Vol. II, Para. 267, p. 70, McMillan, London 1897.
- [7] See section 3. 1. 6.
- [8] GABOR, D., Theory of communication, *J. Instn elect. Engrs* **93** [1946], 26.

PROBLÈMES DE RAYONNEMENT EN ACOUSTIQUE DU BÂTIMENT

par M. JACQUES BRILLOUIN

Directeur du Centre d'Acoustique Technique, Paris

Sommaire

On montre, par des exemples tirés de l'expérience et par des considérations théoriques que l'amplitude moyenne des vibrations des parois d'une salle ne peut renseigner sur leur rayonnement, et par suite sur la voie empruntée par le bruit pour pénétrer dans la salle. Une paroi parcourue par des ondes de flexion ne rayonne de l'énergie que si la vitesse de propagation de ces ondes est supérieure à celle du son dans l'air; son «indice de rayonnement» peut être très différent selon qu'il s'agit de vibrations forcées ou de vibrations libres. On esquisse une théorie du plafond suspendu qui rend compte de certaines observations. Enfin on montre que les phénomènes transitoires présentent des aspects différents de ceux du régime permanent, et on expose les résultats de quelques expériences relatives à cette question.

Zusammenfassung

Erfahrung und theoretische Überlegungen zeigen, daß die Kenntnis der mittleren Schwingungsamplitude einer Trennwand nicht ausreicht, um die Schallabstrahlung in einen Raum zu berechnen. Es läßt sich daher auch nicht voraussagen, auf welchen Wegen Störgeräusche in den Raum gelangen. Biegewellen in einer Trennwand strahlen nämlich nur dann Schallenergie ab, wenn ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit größer ist als die Schallgeschwindigkeit in Luft. Das „Strahlungsvermögen“ einer Trennwand kann daher sehr verschieden sein, je nachdem ob es sich um erzwungene oder freie Schwingungen handelt. Es wird eine Theorie der hängenden Decke gegeben, die einige Beobachtungen erklären kann. Schließlich wird gezeigt, daß Einschwingvorgänge Besonderheiten zeigen, die man im stationären Zustand nicht findet. Ferner werden einige diesbezügliche Experimente besprochen.

Summary

Experience, supported by theory, shows that the amount of energy radiated into a room (and, therefore, the ways of penetration of outside noise) cannot be deduced from the knowledge of the mean amplitude of vibration of the partition. In fact, flexural waves in a partition do not radiate unless their velocity be greater than that of sound in air; the “radiation index” of a partition can thus be widely different for forced and for free vibrations. A theory of the suspended ceiling is attempted, and some observations explained. Finally it is shown that transient phenomena may have peculiarities not found in the steady-state, and some relevant experiments are discussed.

Table de Matières

- I. Introduction.
- II. Notations et définitions.
- III. Une observation concernant l'indice de rayonnement d'un plancher.
- IV. Calcul du rayonnement d'une paroi plane.
- V. Modes de vibration des parois dans un bâtiment.
- VI. Esquisse d'une théorie du couplage d'une paroi légère à une paroi lourde.
- VII. Phénomènes transitoires.
- VIII. Conclusions.

I. Introduction

Nous nous proposons ici d'examiner un certain nombre de problèmes dont l'étude nous a paru in-

dispensable à la suite de l'examen et de la discussion de nombreux résultats de mesures de transmission des bruits dans de grands immeubles.

Dans des bâtiments modernes où la transmission indirecte est très importante et dans lesquels le bruit se propage à longue distance [1] la question se pose de déterminer quelle est, dans une salle où le bruit pénètre, la proportion d'énergie rayonnée par les diverses parois. Quand ce ne serait que pour savoir où est le défaut de la construction, quelle paroi doit être modifiée pour améliorer la situation.

Aucune méthode n'existant actuellement pour la mesure des flux acoustiques nous avons entrepris, toutes les fois que nous en avons le temps, de mesurer l'amplitude vibratoire moyenne des parois des salles dans lesquelles nous déterminions les niveaux de bruit.

Nous avons ainsi observé qu'une même paroi peut, à égalité d'amplitude vibratoire moyenne, rayonner beaucoup ou très peu d'énergie selon qu'elle fonctionne en transmission directe, indirecte, ou vibre sous l'effet d'impacts.

Avant d'en donner un exemple dont l'exposé nécessitera quelques explications préliminaires, signalons un autre résultat qui nous a surpris.

Lors de la reconstruction de l'îlot 4 à Orléans, l'architecte, M. ABRAHAM, nous avait demandé de lui donner les indications nécessaires à la réalisation de plafonds suspendus. Ces plafonds furent exécutés au moyen de plaques de plâtre expansé accrochées à des suspentes souples: fil métallique formant une boucle pour lui donner l'élasticité nécessaire. La souplesse des suspentes et leur répartition furent choisies de manière à ce que l'ensemble suspendu ait une fréquence propre de l'ordre de 16 Hz. C'était donc un montage conforme aux données classiques en pareil cas.

Or il se trouva qu'à l'exécution les suspentes souples furent, dans certaines pièces, remplacées par des fils rectilignes, donc raides.

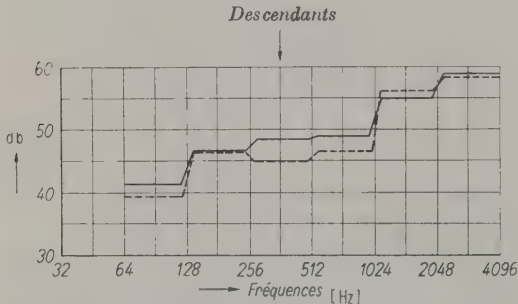


Fig. 1. Indice d'isolement de deux planchers pour des sons aériens émis dans la salle supérieure;
— Suspentes souples,
- - - - - Suspentes rigides.

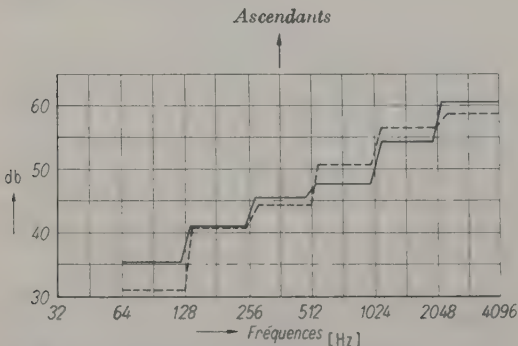


Fig. 2. Indice d'isolement de deux planchers pour des sons aériens émis dans la salle inférieure;
— Suspentes souples,
- - - - - Suspentes rigides.

A notre grand étonnement les mesures montrèrent (Fig. 1 et 2) que, sauf pour les sons très graves (fréquences inférieures à 128 Hz), les deux structures étaient équivalentes. Pourquoi?

Un examen théorique des conditions de rayonnement d'un plafond suspendu nous montrera que ce résultat n'est pas absurde.

Ces faits, et d'autres, nous ont donc conduit à procéder à une étude plus approfondie des problèmes de transmission des bruits dans le bâtiment en considérant les trois étapes suivantes:

1. Excitation de la structure du bâtiment par un bruit aérien ou un choc.
2. Transmission interne des vibrations solides d'un point à un autre du bâtiment.
3. Dans chaque salle où le bruit pénètre, rayonnement d'ondes aériennes par les parois qui vibrent.

L'étude expérimentale de ces trois phases du phénomène nous paraît indispensable si, au lieu de se contenter de constater un état de fait: tel isolement a été observé entre telle et telle salle, on veut essayer de discerner pourquoi ce résultat est obtenu, et par suite comment construire pour obtenir un résultat meilleur.

II. Notations et définitions

1. Une lettre: X , représente une quantité mesurée dans l'air.

La même lettre affectée d'une apostrophe: X' , représente la même quantité mesurée sur une paroi et concerne alors la vibration de cette paroi.

2. Le niveau sonore aérien est, conformément aux normes:

$$N = 20 \log p/p_0; \quad (1)$$

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ baryes.}$$

3. Le niveau de vibration d'une paroi, est défini par:

$$N' = 20 \log v'/v_0, \quad (2)$$

v' étant la vitesse vibratoire efficace de la surface de la paroi normalement à cette surface, et

$$v_0 = p_0/2\rho c = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ cm/s.} \quad (3)$$

Le choix de cette valeur de référence a été déterminé par les considérations suivantes: Si nous considérons la vitesse vibratoire v d'une particule fluide dans un champ acoustique isotrope et diffus, sa composante u suivant une direction donnée quelconque est, en moyenne

$$u = p/2\rho c \quad (4)$$

p étant la pression acoustique moyenne dans le champ acoustique.

Si donc, dans un tel champ, on mesure la composante u (p. e. avec un microphone à ruban) le niveau sonore sera

$$N = 20 \log u/v_0,$$

v_0 ayant la valeur indiquée plus haut.

4. Coefficient et indice de rayonnement G . Imaginons dans un champ isotrope et diffus un plan indéfini P perpendiculaire à l'axe Ox (Fig. 3); la moitié des ondes traverse ce plan de gauche à droite, l'autre moitié de droite à gauche. Supprimons ces dernières ondes. Le champ qui subsiste comporte donc uniquement des ondes venant de la région E ($x < 0$) et traversant le plan P pour pénétrer dans la région R ($x > 0$).

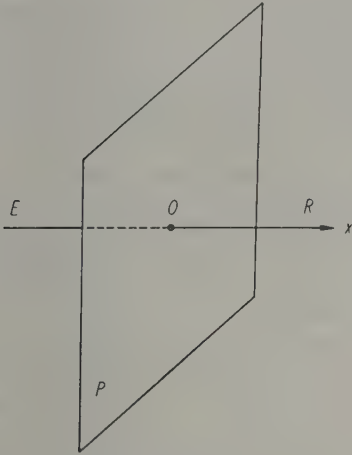


Fig. 3.

Il est aisé de voir que dans ce champ la relation (4) est conservée. Cela résulte des hypothèses de diffusion et d'isotropie.

Matérialisons le plan P en lui imposant des vibrations de flexion telles qu'en chacun de ses points la vitesse vibratoire normale à P soit égale à la composante selon Ox de la vitesse vibratoire préalablement existante dans le champ.

L'espace E peut alors être considéré comme virtuel et être supprimé.

Dans l'espace R rien n'est changé. Le flux d'énergie rayonné par l'unité d'aire de P dans l'espace R est alors

$$\varphi_r = p^2/2\rho c = 2\rho c u'^2, \quad (5)$$

u' étant la valeur moyenne de la vitesse vibratoire de la paroi P .

Si maintenant nous modifions le mode de vibration du plan P tout en maintenant la valeur de u' , le flux rayonné changera et prendra une certaine valeur φ_r .

Nous nommons coefficient de rayonnement le rapport

$$g = \frac{\varphi_r}{2\rho c u'^2} \quad (6)$$

et indice de rayonnement le nombre

$$G = 10 \log g. \quad (7)$$

Le coefficient de rayonnement reste égal à 1 tant que la vibration de la paroi P est représentable par un ensemble d'ondes provenant d'un espace virtuel E dans lequel règne un champ isotrope diffus, c. à. d. tant que la distribution spatiale, en amplitude et en phase, des vitesses vibratoires de P correspond à une distribution possible des composantes selon Ox des vitesses vibratoires dans un champ isotrope diffus.

Dans tous les autres cas g pourra prendre des valeurs différentes de 1; G ne sera plus nul.

Mesure de l'indice de rayonnement en salle réverbérante. Lorsqu'une seule paroi d'aire S rayonne du bruit dans une salle, ce qui est le cas au laboratoire, et aussi entre les salles contiguës d'un bâtiment où la transmission indirecte est négligeable, la puissance acoustique émise par la paroi est

$$W = S \varphi_r. \quad (8)$$

D'autre part si le champ acoustique dans la salle de mesure est à peu près isotrope et diffus la pression acoustique moyenne p est

$$p^2 = 4\rho c W/A, \quad (9)$$

A étant l'absorption totale de la salle. On en tire

$$\varphi_r = \frac{W}{S} = \frac{p^2}{4\rho c} \cdot \frac{A}{S}. \quad (10)$$

φ_1 restant défini par l'équation (5) on trouve

$$g = \frac{\varphi_r}{\varphi_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2\rho c u'} \right)^2 \frac{A}{S}. \quad (11)$$

N étant alors le niveau sonore aérien mesuré dans la salle, N' le niveau vibratoire moyen de la face rayonnante de la paroi

$$G = N - N' - 3 + 10 \log A/S. \quad (12)$$

5. Indice de transmission interne F , mesuré entre deux points 1 et 2 de la structure du bâtiment, dont les vitesses vibratoires sont v'_1 et v'_2

$$F = 20 \log v'_1/v'_2 = N'_1 - N'_2. \quad (13)$$

Sa mesure est immédiate.

6. Indice d'excitation E . Un champ sonore aérien de niveau N crée sur une paroi qu'il touche un régime vibratoire de niveau N' .

Nous nommerons indice d'excitation le nombre

$$E = N' - N + 3, \quad (14)$$

Sa mesure est immédiate.

7. Décomposition du phénomène de transmission directe.

N_e est le niveau sonore aérien dans la salle où le bruit est émis,

N'_e est le niveau moyen de vibration de la face de la paroi exposée au bruit dans la salle d'émission,

N'_r est le niveau moyen de vibration de la face de la paroi qui rayonne du bruit dans la salle de réception,

N_r est le niveau sonore aérien dans la salle de réception.

L'indice d'isolement Q de la cloison usuellement mesuré est

$$Q = N_e - N_r - 10 \log A/S. \quad (15)$$

On voit de suite que l'on a

$$-Q = E + F + G. \quad (16)$$

On a donc bien décomposé le phénomène en ses trois étapes.

La mesure des indices E , F , G est très instructive et donne des résultats souvent difficiles à interpréter.

Dans le cas des plafonds de l'îlot 4 à Orléans on s'aperçoit que, pour des isollements équivalents lorsque le bruit traverse le plafond de haut en bas ou de bas en haut, le mécanisme de l'affaiblissement est très différent.

Exemple:

Dans la bande 128—256 Hz on obtient les valeurs suivantes

	E	F	G	Q
de haut en bas	-37,5	+2,5	-11,5	+46,5
de bas en haut	-15	-23	-3	-41

dans la bande 1024—2048 Hz

	E	F	G	Q
de haut en bas	-48	-9	+1	+56
de bas en haut	-32,5	-32	+8	+56,5

Il est frappant de voir les écarts observés dans les divers indices, écarts qui montrent que la localisation des divers affaiblissements est très différente selon le sens de la propagation.

III. Une observation concernant l'indice de rayonnement d'un plancher.

Il s'agit d'un plancher formé de poutrelles de béton armé coulées sur des corps creux en céramique et recouvert d'un parquet en bois sans joints, struc-

ture très fréquemment utilisée en France dans les bâtiments à ossature en béton armé. Ce plancher pèse environ 400 kg/m². Son indice d'isolement moyen entre 100 et 3000 Hz doit donc être de l'ordre de 51 db.

Le bâtiment où il est installé (ossature béton, remplissages en brique) comporte une transmission indirecte importante.

L'affaiblissement observé entre une salle du 2. étage et la salle située au dessous est celui que l'on aurait dans un bâtiment sans transmission indirecte avec un plancher ayant un indice d'isolement de 35 db. La transmission indirecte fait donc perdre 16 db, chiffre énorme.

D'autre part dans la salle réceptrice le niveau vibratoire moyen des six faces: plafond, parois verticales, plancher, est à très peu près le même.

Si l'indice de rayonnement G des six faces était le même, la formule (12) permettrait de le calculer. Il apparaîtrait à peu près constant entre 100 et 5000 Hz. Sa valeur serait: + 2 db.

D'autre part lorsque le plafond est excité par un marteau automatique ou un vibromoteur il semble y avoir très peu de transmission indirecte. Nous n'en avons pas la preuve expérimentale directe, n'ayant pas eu le temps de mesurer la vibration des parois verticales. Cependant on observe en général que des chocs verticaux appliqués sur le plancher excitent peu les vibrations de flexion des parois verticales. De plus l'observation auditive montrait que l'on localisait assez bien la position de la source vibratoire située dans la pièce supérieure. Si nous calculons alors l'indice de rayonnement du plafond en faisant l'hypothèse qu'il est à peu près seul à rayonner, nous aurons une valeur par excès de cet indice. Or le résultat obtenu, en comparant le niveau sonore N mesuré dans la salle au niveau de vibration N' mesuré au plafond, donne les valeurs suivantes: de 128 à 512 Hz l'indice de rayonnement G serait d'environ - 33 db; au dessus de 512 Hz il croît légèrement et atteindrait la valeur - 20 db à 4000 Hz.

Que conclure de ces deux observations?

Pour l'émission aérienne, si les six faces avaient le même indice de rayonnement l'isolement normal du plancher n'aurait été réduit que de 8 db. Or la réduction peut être évaluée à environ 16 db.

Il faut donc admettre l'une des deux hypothèses suivantes:

ou bien le plancher est exceptionnellement mauvais eu égard à son poids et rayonne à peu près autant que les autres parois ($G = +2$). Mais alors, sous l'effet d'impacts ou de vibrations son indice de rayonnement est de 30 à 25 db plus faible, selon la fréquence.

Ou bien le plancher a un indice d'isolement normal, dû en grande partie à ce qu'il rayonne peu, puisque dans ce cas son indice de rayonnement doit être très inférieur à celui des cloisons qui, sans avoir de plus grandes amplitudes vibratoires, sont responsables de la perte d'isolement global de 16 db. D'où vient alors cette différence entre le rayonnement des cloisons et celui du plancher?

Dans l'une comme dans l'autre hypothèse la question se pose: comment rayonne une paroi? Peut elle, selon les cas, avoir des indices de rayonnements très différents?

IV. Calcul du rayonnement d'une paroi plane.

Considérons un plan P indéfini ($x=0$) parcouru par des ondes de flexion qui se propagent vers les y croissants à la vitesse c_1 .

La vitesse vibratoire des points de ce plan est dirigée suivant Ox et a pour valeur

$$u' = u'_1 \cdot \exp [i \omega (t - y/c_1)]. \quad (1)$$

Dans le demi espace $x > 0$, la vibration du plan P crée un champ acoustique dont le potentiel des vitesses Φ peut s'écrire

$$\Phi = e^{i\omega t} \Psi(x, y). \quad (2)$$

L'équation générale du son s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi = 0, \quad (3)$$

c étant la vitesse de propagation du son dans l'air. Sur le plan $x=0$, la vitesse vibratoire est imposée par la condition (1). On doit donc avoir pour $x=0$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u'_1 \cdot \exp(-i \omega y/c_1). \quad (4)$$

Ecrivons Ψ sous la forme

$$\Psi = A \cdot \exp [i(\alpha x + \beta y)]. \quad (5)$$

En portant cette valeur dans les relations (3) et (4), il vient

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2/c^2 \quad (6)$$

et

$$i \alpha A \cdot \exp(i \beta y) = u'_1 \cdot \exp(-i \omega y/c_1).$$

Cette dernière relation doit être satisfaite quel que soit y . On en tire donc

$$\beta = -\omega/c_1 \quad (7)$$

valeur qui, portée dans (6) donne

$$\alpha^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_1^2} \right). \quad (8)$$

On a enfin

$$A = -i u'_1 / \alpha. \quad (9)$$

Deux cas peuvent se présenter:

1. $c_1 > c$. La vitesse de propagation des ondes de flexion est supérieure à la vitesse du son dans l'air. α est alors réel et peut s'écrire

$$\alpha = -\frac{\omega}{c} \cos \theta \quad (10)$$

avec $\sin \theta = c/c_1$.

On a alors

$$A = i \cdot \frac{c}{\omega \cos \theta} u'_1, \quad (11)$$

$$\Psi = A \cdot \exp \left[-i \frac{\omega}{c} (x \cos \theta + y \sin \theta) \right]. \quad (12)$$

Le champ acoustique est constitué par une onde plane progressive dont la direction de propagation fait avec Ox l'angle θ .

Le flux rayonné par la paroi est alors:

$$\varphi_r = \frac{\rho c u'^2_1}{2 \cos \theta} = \frac{\varphi_1}{2 \cos \theta} \quad (13)$$

où $\varphi_1 = 2 \rho c u'^2_1 / 2$, $u'_1 / 2$ étant la valeur efficace de la vitesse u' .

Le coefficient de rayonnement est

$$g = 1/2 \cos \theta. \quad (14)$$

Pour $c_1 = \infty$	$\theta = 0$	$g = 1/2$
quand c_1 diminue,	θ croit,	g augmente
Pour $c_1 = 2c/\sqrt{3}$	$\theta = \pi/3$	$g = 1$
lorsque $c_1 \rightarrow c$	$\theta \rightarrow \pi/2$	$g \rightarrow$

2. $c_1 < c$. α est alors un imaginaire pur et peut s'écrire

$$\alpha = i \frac{\omega}{c} \sinh \psi \quad (15)$$

avec

$$\cosh \psi = c/c_1.$$

Il vient alors

$$A = -\frac{c}{\omega \sinh \psi} u'_1, \quad (16)$$

$$\Psi = A \cdot \exp \left[-\frac{\omega}{c} (x \sinh \psi + i y \cosh \psi) \right]. \quad (17)$$

L'onde émise par le plan P est plane et non uniforme (Fig. 4). La surface d'onde est parallèle au plan xOz. L'onde progresse dans le sens des y croissants à la vitesse c_1 . Les particules aériennes ont des trajectoires elliptiques dont le grand axe est parallèle à Oy et le petit axe parallèle à Ox. Le sens de parcours est indiqué sur la figure. La composante de la vitesse dans le sens Oy est en phase avec la pression. La composante dans le sens Ox est en quadrature avec la pression. Le rayonnement de la paroi est donc nul.

Ces ondes planes et non uniformes, dont l'amplitude décroît exponentiellement vers les x croissants, se rencontrent dans la théorie de la réflexion totale. En acoustique on les trouve également lorsqu'on étudie la propagation du son entre deux parois absorbantes [2] ou la décomposition en 8 ondes planes obliques d'un mode de vibration propre amorti d'un parallélépipède à parois absorbantes.

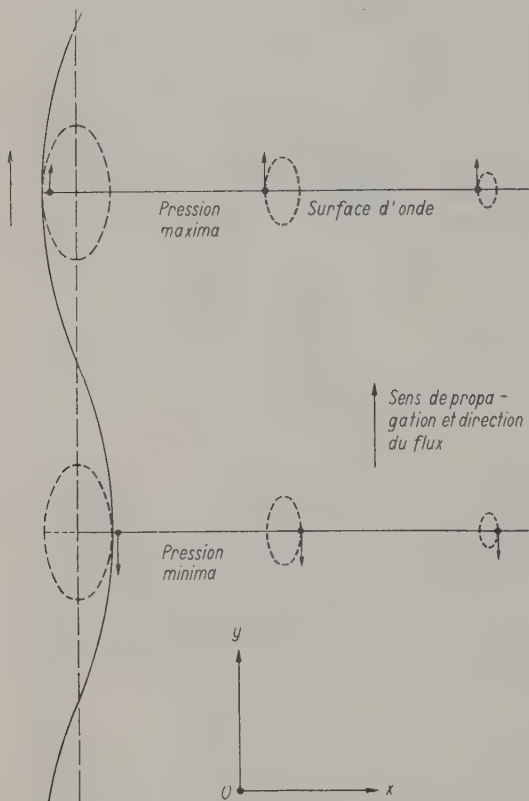


Fig. 4. Onde engendrée par une paroi que parcourt une onde de flexion dont la vitesse est inférieure à la vitesse du son dans l'air.

Il s'agit là d'un phénomène qui ressemble à la houle, c. à. d. qui reste en surface et pénètre peu dans la profondeur du fluide. Il diffère cependant de la houle trochoïdale car cette dernière n'est pas un mouvement irrotationnel comme l'est notre onde.

Affaiblissement de l'onde dans le sens Ox.

Il convient d'examiner si l'affaiblissement du champ sonore dans le sens des x croissants est assez rapide pour que, dans la pratique, ce phénomène ait de l'importance. Cet affaiblissement est donné

par le facteur $\exp\left(-\frac{\omega x}{c} \sinh \psi\right)$. Il est donc, en décibels,

$$D = 8,7 \frac{\omega x}{c} \sinh \psi = 54,7 \frac{x}{\lambda} \sinh \psi.$$

Pour avoir un affaiblissement de 10 db il faut donc s'éloigner à une distance de la paroi égale à

$$x_{10} = \frac{\lambda}{5,47 \sinh \psi}.$$

Le tableau suivant donne quelques valeurs de x_{10}/λ en fonction de c_1/c .

c_1/c	1	0,99	0,95	0,9	0,5
x_{10}/λ ...	∞	1,29	0,568	0,38	0,106

On voit que, même pour des vitesses de propagation c_1 très peu inférieures à la vitesse du son dans l'air, l'affaiblissement est extrêmement rapide.

Cas d'ondes stationnaires.

Dans la pratique, nous n'aurons pas affaire à une onde de flexion progressive le long d'un plan indéfini, mais à un système d'ondes stationnaires dans une paroi limitée. Ces ondes stationnaires sont représentables par la superposition d'ondes progressives. Si ces ondes progressives ont une vitesse de propagation c_1 supérieure à c , la paroi rayonne; si c_1 est inférieure à c , la paroi ne rayonne pas.

En fait la paroi se trouve découpée en mailles par des lignes nodales (Fig. 5). D'une maille aux mailles contiguës la vibration de la paroi est en opposition de phase: lorsqu'une maille est en saillie, ses voisines sont en creux.

Lorsque la vitesse de propagation c_1 des ondes de flexion dans la paroi devient inférieure à c , les mailles sont petites. L'air chassé par une bosse, au

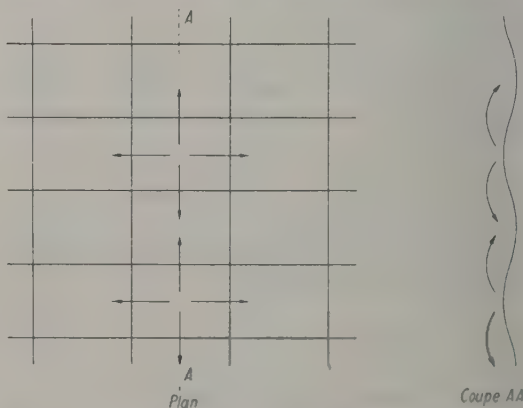


Fig. 5. Mouvements de l'air au voisinage d'une paroi soumise à des ondes stationnaires de flexion dont les lignes nodales sont trop rapprochées pour que la paroi rayonne.

lieu d'engendrer une onde progressive, s'écoule simplement dans les creux voisins. C'est exactement le même phénomène que l'on observe dans les fréquences graves avec un haut-parleur sans écran. Il ne rayonne plus : l'air chassé devant la membrane la contourne et s'écoule derrière elle.

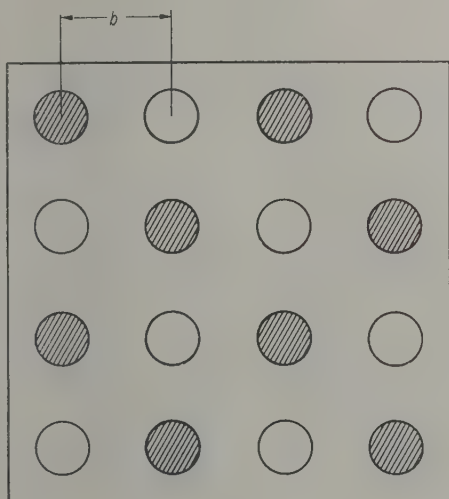


Fig. 6. Si les haut-parleurs blancs et noirs sont en phase, le système rayonne quelle que soit la fréquence. S'ils sont en opposition de phase, le rayonnement n'apparaît que pour les sons aigus, dont la longueur d'onde dans l'air est inférieure à $2b$.

Une expérience simple permet d'entendre ce phénomène. La paroi est schématisée par un écran sur lequel on monte des petits haut-parleurs disposés en damier (Fig. 6). On alimente séparément les deux groupes figurés en noir et blanc. Un commutateur inverseur permet de connecter ces groupes soit en phase, soit en opposition. Dans le premier cas la paroi fonctionne dans l'ensemble comme un piston et rayonne de l'énergie. Dans le second cas le système figure une paroi dans laquelle existe un système d'ondes stationnaires dont les mailles sont carrées, les lignes nodales passant entre les haut-parleurs. Le côté b des carrés ainsi définis est alors égal à $\lambda_1/2$; λ_1 étant la longueur d'onde des ondes de flexion dans la paroi. Les mailles du système ont alors les dimensions qu'elles auraient si la vitesse de propagation des ondes de flexion était $c_1 = \lambda_1 n = 2bn$, n étant la fréquence. La coupure se produira donc à la fréquence $n_0 = c/2b$ pour laquelle la longueur d'onde λ du son dans l'air est $\lambda_0 = 2b$.

Quand la fréquence n est inférieure à n_0 , le son produit est beaucoup plus faible lorsque les groupes de haut-parleurs sont en opposition que lorsqu'ils sont en phase. Quand n est supérieur à n_0 , l'inten-

sité rayonnée dans les deux cas est sensiblement la même.

Ce montage peut d'ailleurs être utilisé comme émetteur passe-haut, la fréquence de coupure étant réglée par la distance b entre haut-parleurs.

Une dernière remarque doit encore être faite : dans la pratique, la présence d'obstacles plus ou moins absorbants au voisinage de la paroi déforme le champ acoustique théorique. Les ondes aériennes produites deviennent légèrement obliques, faisant ainsi apparaître le rayonnement nécessaire pour remplacer l'énergie absorbée.

V. Modes de vibration des parois dans un bâtiment

Pour voir comment le rayonnement d'une paroi réelle peut se modifier selon les circonstances il faut examiner comment les parois d'un bâtiment sont susceptibles de vibrer.

Vibrations forcées.

Ce cas est celui d'une paroi soumise sur toute sa surface à des pressions acoustiques, comme cela se produit dans la transmission directe d'ondes aériennes par une paroi simple. La distribution spatiale des amplitudes et des phases de la vibration est alors imposée par celle qui existe dans l'air sur la face exposée au bruit.

La vitesse de propagation des ondes de flexion libres dans la paroi n'intervient alors que pour régir dans une certaine mesure l'amplitude des vibrations de la paroi, ainsi que l'a montré CREMER [3].

A chaque onde incidente correspondra une onde transmise ayant la même direction de propagation mais dont l'amplitude sera fonction de l'angle d'incidence θ . Le champ acoustique rayonné par la paroi restera dans une certaine mesure diffus, mais ne sera plus isotrope. Dans ce champ transmis le flux rayonné par la paroi n'est donc plus lié à la vitesse vibratoire moyenne de la paroi par la relation $\varphi = 2\rho c u^2$, qui postule l'isotropie.

Le coefficient de rayonnement g pourra donc être différent de 1, l'indice G différent de 0.

Vibrations libres

Dans le cas de vibrations libres les mouvements de la paroi résultent de la superposition d'ondes de flexion progressives qui cheminent à la vitesse c_1 .

Ce sera le cas d'une paroi simple attaquée par un marteau ou une source vibratoire localisée.

La vitesse de propagation c_1 des ondes de flexion est, on le sait, proportionnelle à la racine carrée de la fréquence. On peut donc l'écrire

$$c_1 = c \sqrt{n/n_0},$$

n_0 étant la fréquence pour laquelle $c_1 = c$.

Par suite, pour les vibrations dont la fréquence est supérieure à n_0 , la paroi rayonnera. Pour celles dont la fréquence est inférieure à n_0 , elle ne rayonnera pas.

La fréquence de coupure n_0 se mesure aisément pour peu que l'on ait de l'oreille en repérant la hauteur de la fondamentale et des premiers partiels d'une verge taillée dans un élément de la paroi. Nous en donnons quelques valeurs ci-dessous :

Plaques de plâtre expansé (plafonds de l'îlot 4 à Orléans) $n_0 = 680$ Hz
Placoplâtre de 1 cm d'épaisseur.. $n_0 = 3080$ Hz
Tôle d'acier de 1 mm d'épaisseur (valeur calculée) $n_0 = 6400$ Hz.

Bruit produit par une paroi en vibration libre.

Pour nous rendre compte de l'importance du phénomène il est bon de donner quelques chiffres. Nous avons donc calculé le niveau sonore N (mesuré au moyen d'un microphone-pression) qui existe devant une paroi indéfinie parcourue par des ondes de flexion dont le niveau vibratoire N' reste constant. Nous donnons dans les tableaux suivants la valeur du terme $N - N'$ en fonction de la fréquence n pour une paroi dont la fréquence de coupure n_0 est égale à 1000 Hz, valeur qui est dans le domaine de la pratique comme le montrent les chiffres donnés plus haut.

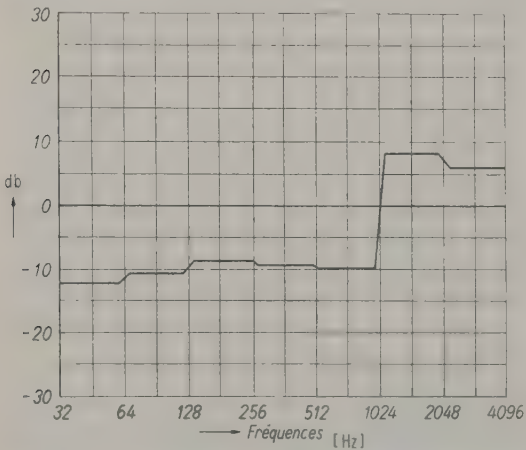


Fig. 7. Indice de rayonnement d'un plancher muni d'un plafond suspendu par attaches souples dans le cas d'une émission de sons aériens dans la salle supérieure.

Lorsque n est supérieur à n_0 , le niveau N est indépendant de la distance du microphone à la paroi (onde progressive).

Lorsque n est inférieur à n_0 , N décroît lorsqu'on s'éloigne de la paroi. Nous avons calculé $N - N'$ pour des distances x de 0,50—1—2—4 m.

$n \geq n_0$	n [Hz]	$N - N'$ [db]
	∞	-6
	10 000	-5,5
	5 000	-5
	2 000	-3
	1 333	0
	1 111	4
	1 010	14
	1 000	∞

$n \leq n_0$	n [Hz]	$N - N'$ [db]			
		à 0,50 m	à 1 m	à 2 m	à 4 m
	1000	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	990	+6	-2	-18	-50
	909	-19	-42	-88	-180
	800	-32	-64	-129	-258
	667	-41	-79	-155	-306
	500	-46	-86	-167	-328
	333	-47	-85	-160	-312
	250	-46	-80	-150	-289
	100	-40	-64	-112	-208
	50	-36	-54	-89	-159

Ces chiffres, à notre avis, n'ont pas besoin de commentaires.

Parois anisotropes

Dans le cas de parois anisotropes (bois, structures comportant des poutrelles, etc. . .) la vitesse de propagation des ondes de flexion dépend de la direction de propagation des ondes. On aura donc deux directions dans lesquelles n_0 sera maximum ou minimum. Entre ces deux valeurs de n_0 les ondes rayonneront ou ne rayonneront pas suivant leur direction. La coupure sera donc, en pratique, moins marquée qu'avec une cloison isotrope.

Vibrations semi-libres

Dans beaucoup des cas pratiques et principalement dans les cas où on observe des transmissions indirectes importantes, les parois susceptibles de rayonner sont relativement légères par rapport à l'ossature du bâtiment. On peut estimer que leur présence ne modifie pas fondamentalement les vibrations de cette ossature. Par suite les lignes ou les points d'attache de ces parois à l'ossature sont en vibration forcée, ou, tout au moins, subissent un régime vibratoire dont la répartition spatiale dépend beaucoup plus des propriétés de l'ossature que de celles de la paroi.

La paroi prendra donc un régime de vibration que nous nommerons «semi-libre», dans lequel ses propriétés joueront un rôle d'autant plus important que les liaisons avec l'ossature seront moins nombreuses et moins rigides.

A ce point de vue une liaison par points isolés sera moindre qu'une liaison par lignes; un appui moindre qu'un encastrement.

Dans le cas des plafonds suspendus de l'îlot 4, à Orléans, dont nous avons parlé au début de cet article — suspentes rigides dans un cas, souples dans l'autre, mais réparties de la même manière — nous avons tracé les diagrammes de l'indice de rayonnement des plafonds. Ces diagrammes sont variables, toutes les mesures faites dans ce bâtiment ayant montré que la transmission indirecte y est faible. Ils sont, dans l'ensemble, assez confus et difficiles à interpréter mais tous montrent une augmentation brusque de l'indice de rayonnement (15 à 30 db) lorsque l'on passe des octaves inférieures à 1024 Hz aux octaves supérieures. Or, nous l'avons indiqué plus haut, la fréquence de coupure n_0 des plaques de plâtre employées pour ces plafonds est de 680 Hz.

Nous donnons deux de ces diagrammes correspondant l'un (Fig. 7) à un plancher à suspentes souples dans le cas d'une émission aérienne dans la salle supérieure, l'autre (Fig. 8) à un plancher à suspentes rigides dans le cas d'impacts par un marteau.

Il semble donc bien que le fait de l'accrochage du plafond par points isolés ait été plus important que la nature des suspentes. Ce mode d'accrochage permet en effet au plafond de prendre des déformations

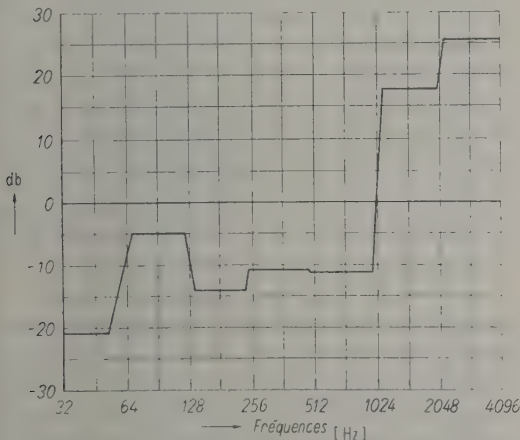


Fig. 8. Indice de rayonnement d'un plancher muni d'un plafond suspendu par attaches rigides dans le cas d'impacts.

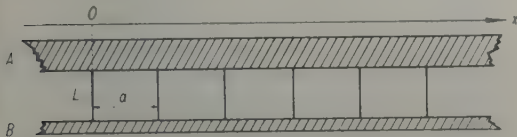


Fig. 9. Schéma d'un plancher avec plafond suspendu.

presque libres même en cas d'excitation par bruit aérien, c.à.d. de vibration forcée du plancher: l'existence de la coupure dans ce cas en est la preuve.

VI. Esquisse d'une théorie du couplage d'une paroi légère à une paroi lourde

Ce problème est l'extension de celui de l'accrochage d'un plafond. Nous nous proposons d'examiner comment une liaison par lignes ou par points isolés transmet les vibrations d'une face à l'autre de la paroi composite.

Pour simplifier nous considérerons d'abord un problème à deux dimensions. Soit A (Fig. 9) un plancher porteur relativement massif auquel un plafond B relativement léger est accroché par une série de suspentes L régulièrement espacées. Nous supposons ces suspentes transversalement assez souples pour ne transmettre au plafond que des mouvements verticaux.

La différence de masse entre les deux éléments nous permet d'admettre, en première approximation, que les vibrations du plancher A ne sont pas sensiblement modifiées par la présence du plafond.

Lorsque le plancher A atteint par des vibrations est parcouru par un onde de flexion progressive se propageant vers les x croissants, l'élongation verticale z d'un point de A est de la forme

$$z = A \cdot \exp [i \omega(t - x/c_1)]. \quad (1)$$

La distance entre les points d'attache L étant a , leurs abscisses sont: $x_m = ma$ (m entier, positif, négatif ou nul).

Leurs mouvements verticaux z_m sont alors

$$z_m = A \cdot \exp [i \omega(t - ma/c_1)]. \quad (2)$$

Effet de la liaison

Utilisons d'abord un mode de raisonnement aujourd'hui classique dans les problèmes de propagation d'ondes dans les structures périodiques. Il consiste à remarquer que la vitesse de propagation c_1 de l'onde du plancher n'est que partiellement connue par les effets de cette onde sur le plafond.

En effet, le déplacement z_m d'une suspente ne change pas, si l'on remplace la vitesse c_1 par une vitesse c'_1 liée à la précédente par la relation

$$\frac{a\omega}{c'_1} = \frac{a\omega}{c_1} + 2k\pi,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{c'_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{k}{a n} \quad (3)$$

$$(n = \omega/2\pi).$$

Ceci revient à dire que l'on peut, sans que le plafond s'en aperçoive, remplacer une onde ayant la

vitesse c_1 et la longueur d'onde λ_1 par une autre, de vitesse c'_1 et de longueur d'onde λ'_1 , avec

$$\frac{1}{\lambda'_1} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{k}{a}. \quad (4)$$

C'est ce que fait comprendre la Figure 10. Il y apparaît avec évidence que l'onde longue (trait interrompu) se déplaçant rapidement produira le même effet sur les points L que l'onde courte (trait continu) de même fréquence qui se propage 9 fois plus lentement.

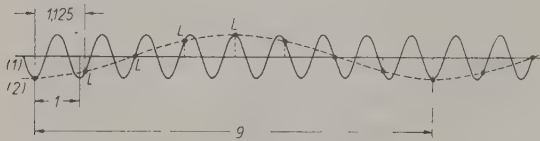


Fig. 10. Les suspentes L du plafond prennent le même mouvement lorsque le plancher est parcouru par les deux ondes 1 (trait continu) cheminant lentement, et 2 (trait interrompu) cheminant neuf fois plus vite;
 — Vitesse 1 cm/s,
 - - - - - Vitesse 9 cm/s.

Par suite, le plafond est inapte à déceler le sens de propagation et la valeur exacte de la vitesse de propagation de l'onde du plancher. Nous pouvons donc simplifier notre étude en prenant pour c'_1 la vitesse la plus grande en valeur absolue qui soit compatible avec la relation (3), c. à. d. celle qui correspond à la longueur d'onde

$$\lambda'_1 \geq 2a.$$

Par conséquent tout se passe dans le plafond comme si la vitesse de propagation des ondes dans le plancher était toujours supérieure à $2an$.

Cette vitesse apparente ne saurait donc être inférieure à la vitesse du son dans l'air que pour les fréquences $n < c/2a$, c'est-à-dire pour les ondes dont la longueur λ dans l'air satisfait à $\lambda > 2a$.

Forme des ondes dans le plafond

Comme, dans cette esquisse de théorie, nous considérons un phénomène illimité (de $x = -\infty$ à $x = +\infty$) dans une structure périodique régulière, les ondes du plafond doivent être représentables par la superposition d'ondes sinusoïdales se propageant sans affaiblissement. Seules les ondes ayant des vitesses de propagation c'_k régies par la relation (3)

$$\frac{1}{c'_k} = \frac{1}{c_1} + \frac{2k\pi}{a\omega}$$

satisfont aux conditions de périodicité temporelle et

spatiale imposées par le mouvement des suspentes, savoir:

$$z_m = A_k \cdot \exp[i\omega(t - ma/c'_k)].$$

Or les fonctions $f_k = \exp(i\omega x/c'_k)$ forment, dans l'intervalle $(0, a)$ qui sépare deux suspentes, une suite de fonctions orthogonales, car on a:

$$\int_0^a \exp(-i\omega x/c'_k) \exp(i\omega x/c'_n) dx = 0$$

lorsque c'_k et c'_n satisfont à la relation (3).

Pour justifier en toute rigueur la représentation du mouvement du plafond par une série

$$\exp(i\omega t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cdot \exp(-i\omega x/c'_k)$$

il faudrait démontrer que la suite des fonctions f_k est complète et que la série est convergente dans l'intervalle considéré. Faute de cette démonstration nous nous contenterons dans la présente esquisse de la présomption suivante: lorsque les mouvements des suspentes sont en phase, la vitesse c_1 est infinie, les fonctions f_k prennent la forme $f_k = \exp(i2k\pi x/a)$. Notre série se réduit donc à une série de Fourier qui, elle, jouit des propriétés nécessaires. Nous admettrons donc que notre représentation reste valable dans les autres cas.

Les vitesses de propagation des diverses ondes ainsi séparées sont en nombre infini. La plus grande est, en valeur absolue, supérieure à $an/2$.

Il n'y aura donc qu'un nombre limité de ces ondes qui aient une vitesse de propagation supérieure à la vitesse du son dans l'air, et par suite qui soient susceptibles de fournir un rayonnement dans l'air situé sous le plafond. Au contraire, toutes les ondes (théoriquement en nombre infini) dont les vitesses de propagation sont inférieures à la vitesse du son dans l'air, ne rayonneront pas d'énergie ou en rayonneront très peu.

Il est d'autre part intuitivement évident que les ondes qui auront la plus grande amplitude seront celles dont la vitesse de propagation c'_k sera le plus proche de la vitesse de propagation des ondes de flexion libres du plafond. Ce phénomène à la fois spatial et temporel est en effet analogue à une résonance.

Par suite il aura intérêt à ce que la paroi constituant le plafond ait la fréquence de coupure n la plus élevée possible.

D'autre part, la série des vitesses compatibles avec la relation (3) sera d'autant plus serrée que l'écart a entre suspentes sera plus grand. Donc, plus cet écart sera grand, plus on aura de chance qu'une onde ayant une vitesse très proche de la vitesse des

ondes propres du plafond soit excitée de préférence à des ondes plus rapides. Cette considération rejoint une évidence intuitive: plus les suspentes seront écartées moins elles seront nombreuses; moins il y a de contacts entre le plafond et le plancher plus la vibration du plafond se rapproche de la forme d'une vibration libre qui, si la fréquence est inférieure à n_0 , ne rayonne pas.

Il y a donc intérêt à espacer les suspentes le plus possible.

Réaliser ces suspentes par points isolés est évidemment nécessaire si l'on veut que les avantages mis en lumière ci-dessus existent pour des ondes cheminant dans n'importe quelle direction dans le plancher.

L'analyse sommaire des phénomènes que nous venons de donner permet donc de comprendre les faits observés dans les planchers de l'Îlot 4 à Orléans.

Elle nous indique également une voie: Toutes les fois que les conditions statiques d'une construction imposent à une paroi une certaine raideur: murs portants par exemple, cette paroi aura une fréquence de coupure relativement basse (on trouve dans l'article de CREMER déjà cité des données précieuses à ce sujet). Il sera donc avantageux de masquer cette paroi par une paroi plus mince, attachée par points isolés à la paroi portante, et qui, elle, sera susceptible de vibrer sans faire de bruit.

La technique actuelle des murs composites qui jusqu'ici ont surtout été étudiés au point de vue de l'étanchéité et de l'isolation thermique, paraît se prêter aisément à de telles réalisations. Des mesures en cours dans un bâtiment construit de la sorte nous ont déjà montré que de tels murs — bien que n'ayant pas été spécialement étudiés au point de vue acoustique — paraissent doués de qualités intéressantes.

VII. Phénomènes transitoires

Nous avons jusqu'ici examiné le cas de phénomènes permanents et nous avons montré que, au voisinage d'une paroi qui vibrait sans rayonner, il existe un champ acoustique dont l'intensité décroît exponentiellement lorsqu'on s'éloigne de la paroi. Il s'agit donc là d'un champ acoustique localisé au voisinage de la source, phénomène général que l'on rencontre dans l'étude de toutes les sources sonores. Un tel champ est stationnaire. Son entretien demande uniquement que le mouvement de la source se perpétue, mais n'emprunte aucune énergie à la source. L'énergie acoustique existant dans ce champ est stationnaire, „stagnante“. Elle a été mise en place en prélevant de l'énergie sur la source au mo-

ment où le mouvement de cette dernière a débuté. Elle se dissipera sous forme d'ondes progressives lorsque la source s'arrêtera.

Nous retrouvons là le problème que j'ai récemment traité dans le cas de sources sphériques [4].

Il paraît alors certain que les phénomènes que l'on observera, et leurs effets sur l'audition, pourront être très différents selon que l'on aura affaire à une vibration prolongée de la paroi ou à des trains d'onde brefs comme ceux qui résultent d'impacts.

Nous n'avons pu faire encore des expériences systématiques sur cette question, mais pouvons signaler le résultat de mesures qui en prouvent l'existence et l'importance pratique.

Dans l'article visé ci-dessus j'avais indiqué que les ondes transitoires de diffraction qui se produisent sur les nombreux reliefs des parois de studios du type dit «polycylindrique» paraissaient de nature à avoir une influence sur la réverbération. Or au début de l'été dernier, M. CONTURIE, Ingénieur au Service des Bâtiments de la Radiodiffusion m'avait signalé certaines singularités observées dans les studios du Centre RODIN en cours d'achèvement. Ayant alors tenté d'en donner une explication théorique — tentative d'ailleurs incomplète et insuffisante — je la soumis à cet Ingénieur qui décida de faire exécuter quelques mesures en vue de préciser les données expérimentales du problème.

Ce travail, effectué avec le plus grand soin par M. BOISARD, fut le suivant: Deux studios furent choisis, l'un ayant des parois planes, l'autre pourvu de nombreux reliefs en forme de calottes sphériques. Dans chacun d'eux on enregistra la courbe de réverbération d'une part après émission prolongée d'un son de bande filtré, d'autre part en utilisant un claquoir. Les enregistrements furent faits par bandes d'octaves, de 100 à 12800 Hz.

Dans le premier studio (parois planes) les mesures faites au claquoir donnent dans l'ensemble des durées de réverbération très légèrement plus longues que celles faites en émission soutenue. L'écart est faible, et reste de l'ordre de grandeur des écarts expérimentaux normaux. Dans le second au contraire (studio bosselé) les durées de réverbération T_1 mesurées au claquoir sont à toutes les fréquences nettement plus faibles que les durées T_2 mesurées en émission soutenue. Le rapport T_1/T_2 est en moyenne égal à 0,46; les valeurs extrêmes observées sont 0,30 (bande 100/200 Hz) et 0,61 (bande 1600/3200 Hz).

Il y a donc là un effet systématique et important qui peut être une des causes de la qualité (ou des défauts, c'est aux artistes à en juger) des studios polycylindriques.

Cet effet mériterait d'être étudié avec soin tant théoriquement qu'expérimentalement.

En tous cas, on doit en tenir compte immédiate-ment. Si, dans une salle à parois bosselées les équations usuelles de la réverbération ne s'appliquent plus d'une manière générale au phénomène de la décroissance de l'intensité sonore, elles seront également en défaut pour l'évaluation du niveau sonore existant en régime permanent, et, en particulier pour la comparaison du niveau en régime permanent stable à celui qui est produit par des impacts répétés. Par suite, tant que ce phénomène n'aura pas été éclairci et bien étudié, on doit prohiber l'emploi comme salle de mesure d'un local contenant un grand nombre d'éléments diffractants, qu'ils soient placés sur les parois ou à l'intérieur de la salle.

De plus, ce coup de sonde dans un domaine encore insuffisamment exploré montre avec évidence qu'il faut s'attendre à observer des phénomènes singuliers, à avoir des surprises, lorsque l'on comparera le comportement de parois en régime permanent ou sous l'effet de chocs.

VIII. Conclusions

Sans pouvoir aboutir à des conclusions définitives, notre étude conduit cependant à un certain nombre de résultats: conseils de prudence, possibilité de réalisations techniques intéressantes, champ de recherches nouvelles, tant dans le domaine du laboratoire que de la construction.

A. Problèmes de mesure

1. n'utiliser qu'avec beaucoup de circonspection les salles douées d'une diffraction importante.
2. se méfier des mesures de transmission effectuées avec un microphone placé trop près de la paroi: ce procédé autrefois utilisé en acoustique du bâtiment est encore parfois employé pour l'étude de structures légères destinées à la construction de carlingues d'avions. Or les tôles ont en général une fréquence de coupure très aigüe. On est donc fondé à se demander si cette méthode, surtout lorsqu'on l'applique à des structures complexes, ne risque pas de donner des résultats trompeurs, le mesure ayant porté sur le champ stationnaire

au voisinage immédiat de la paroi et non sur le rayonnement de la paroi.

B. Problème d'observation

Il serait fort intéressant que la mesure des vibrations des parois fut systématiquement effectuée dans tous les immeubles où les techniciens ont l'occasion de faire des mesures de transmission sonore. Ce travail d'«observation clinique» serait à notre sens un des plus fructueux: lorsqu'on interroge la nature il convient d'être exigeant et de la pousser dans ses derniers retranchements.

C. Problèmes de construction

1. Même lorsqu'il s'agit de la transmission directe par une paroi simple, et à priori dans tous les autres cas, le rayonnement d'une paroi dépend essentiellement de la vitesse de propagation des ondes libres de flexion dans cette paroi.
2. La valeur des indices d'isolement mesurés au laboratoire en transmission directe ne donne de renseignement valable ni sur le comportement des parois en transmission indirecte ni sur leur rayonnement sous l'effet d'impacts.
3. L'emploi de parois relativement légères et souples, ayant une fréquence de coupure n_0 assez élevée, doit permettre de réaliser des structures intéressantes (planchers, parois composites). Ces parois pourraient être efficaces sans être «flottantes» si elles ne sont reliées à l'ossature où à l'élément porteur que par des points isolés et assez espacés.

(Reçu le 28. Mai 1951.)

Bibliographie

- [1] voir par exemple: BRILLOUIN, J., Propagation du bruit dans les constructions: Mesures effectuées dans le bâtiment administratif du Centre d'essai de Moteurs et d'Hélices, à Saclay. — Ann. de l'Institut Technique du bâtiment et des travaux publics. n° 142, (Juillet — Août 1950).
- [2] BRILLOUIN, J., Forme et propagation des ondes sonores dans un espace limité par des surfaces absorbantes. J. Phys. (VII) **10** [1939], 497—503.
- [3] CREMER, L., Theorie der Schalldämmung dünner Wände bei schrägem Einfall. Akust. Z. **7** [1942], 81.
- [4] BRILLOUIN, J., Rayonnement transitoire des sources sonores et problèmes connexes. Ann. Télécommun. (Cahiers d'Acoustique n° 13) **5** [1950], 160—172, 179—194.

BEMERKUNGEN ZUR GEOMETRISCHEN RAUMAKUSTIK

Von E. MEYER und W. KUHL

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Problem der ersten Rückwürfe im Anschluß an den direkten Schallstrahl Schallquelle—Zuhörer. Man kann diese Rückwürfe durch Anbringung geeigneter Schallspiegel insbesondere auf den oberen Teilen der Seitenwände erheblich vermehren. Betrachtungen über die dadurch mögliche Verstärkung der innerhalb der ersten 50 ms ankommenden Schallstrahlen und über die Energiedichte im diffusen Schallfeld unter diesen Bedingungen werden angestellt.

Im Anschluß an die physikalischen Ausführungen werden eine Reihe von praktischen Beispielen besprochen, in denen der Einsatz der Schallspiegel zu bemerkenswerten Verbesserungen der Verständlichkeit von Sprache geführt hat. Es sind dies die wiederaufgebaute Staatsoper Hamburg, der große Saal im Studentenhaus in Bonn, sowie das Landestheater in Hannover.

Summary

The paper deals with the first sound reflections following the direct beam from source to listener. The number of these reflections can be greatly increased by sound mirrors suitably tilted and placed at the upper parts of the side walls in the neighbourhood of the sound source. If these first reflections occur in the 50 ms interval after the arrival of the direct sound a reinforcement takes place. Some formulae are given relating this effect to the energy density in the diffuse sound field.

The second part of the paper describes some practical applications to rooms, in which sound mirrors improve the hearing conditions and especially the intelligibility of speech. They are: the rebuilt opera house at Hamburg, the big hall in the students hostel at Bonn, and the theatre at Hannover.

Sommaire

La présente note traite le problème des premières réflexions du son qui ont lieu après la transmission directe source sonore-observateur. On peut augmenter considérablement ces réflexions en disposant des miroirs acoustiques appropriés sur les parties supérieures des parois. On étudie le renforcement qui peut se produire pendant les 50 premières millisecondes et la densité d'énergie existant dans le champ sonore diffus dans ces conditions.

La seconde partie donne une série de réalisations pratiques montrant l'amélioration notable de l'intelligibilité que l'on peut obtenir en installant des miroirs acoustiques. Il s'agit de l'opéra de Hambourg, de la grande salle de la Maison des Étudiants à Bonn ainsi que du théâtre de Hanovre.

Prüft man fertige Räume oder Planungen von Räumen auf ihre Hörsamkeit hin, so tut man dies im allgemeinen nach zwei Gesichtspunkten, und zwar hinsichtlich der geometrischen Raumakustik und hinsichtlich der statistischen Raumakustik, d. h. man untersucht den Verlauf aller Schallstrahlen von der Schallquelle zum Beobachter hin, und man befaßt sich mit den Fragen des Nachhalls. Für den ersten Punkt ist die Raumform das Entscheidende, während im zweiten Fall die Schallabsorption der Wandbekleidung im Vordergrund steht. Es gab in der Entwicklung der Raumakustik Zeiten, in denen man bald die eine, bald die andere Betrachtungsweise stärker herausstellte, ja sie zum Teil sogar als

die allein zweckmäßige ansah und dementsprechend bei den praktischen Anwendungen Rückschläge erlebte.

Die vorliegende Arbeit soll sich mit einem Teilproblem der geometrischen Raumakustik beschäftigen, das allerdings eine große Bedeutung hat, nämlich mit der Verstärkung des direkten Schalles durch die ersten Rückwürfe. Es ist seit langem bekannt, daß man die Lautstärke eines Schallvorganges am Ort des Zuhörers dadurch erheblich erhöhen kann, daß man ihn in sehr kurzen Zeitabständen ein oder mehrere Male wiederholt, was praktisch durch die Schallreflexionen an den Raumbegrenzungsflächen in der Nähe der Schallquelle geschieht. Allerdings

müssen die reflektierten Schallanteile innerhalb von rund 50 ms nach dem direkten Schall „Schallquelle — Beobachter“ eintreffen, d. h. also die Wegdifferenzen zwischen direktem und reflektiertem Schall dürfen nicht mehr als höchstens 17 m betragen. Diese Fragen sind kürzlich auf Veranlassung des einen Verfassers durch H. HAAS [1] quantitativ studiert worden. Seine Ergebnisse beziehen sich auf die Verständlichkeit von Sprache unter dem Einfluß eines Einzelechos und bestätigen im wesentlichen die oben genannten Zahlen, erweitern sie allerdings in dem von vornherein zu erwartenden Sinne, daß schwächere Reflexionen größere Laufzeitdifferenzen zulassen, stärkere Reflexionen dagegen kleinere Laufzeitdifferenzen bedingen. Starke Absorption der reflektierenden Wand bei hohen Frequenzen erweitert gleichfalls den zulässigen Echobereich zu größeren Laufzeitwerten hin. Daß außerdem die Sprechgeschwindigkeit in die Resultate eingeht, ist selbstverständlich. Die Versuche von HAAS wurden mit einer elektroakustischen Anlage gewonnen, bei welcher der direkte Schall und das Echo von je einem Lautsprecher kamen. Eine Magnetophonapparatur mit endloser Bandschleife diente zur Verzögerung des Echos gegenüber dem direkten Schall. Außerdem konnten die Schallstärke, die Klangfarbe sowie die räumliche Richtung des Echos in beliebigem Verhältnis zu den Werten des direkten Schalles eingestellt werden. Inzwischen wurde diese Versuchsanordnung¹ so erweitert, daß an Stelle eines Echos mehrere Echos, und zwar bis zu neun, erzeugt werden können. Aus den noch im Gang befindlichen Versuchen möge bereits ein Ergebnis erwähnt werden, das für die vorliegenden Betrachtungen von Bedeutung ist. Ein Echo, das gleich stark wie der direkte Schall ist und eine Laufzeitdifferenz zwischen 50 . . . 100 ms hat, stört sehr. Nach dem übereinstimmenden Urteil verschiedener Beobachtergruppen kann diese Störung wesentlich gemildert werden, wenn zwischen direktem Schall und Echo ein oder mehrere Echos eingeschoben werden. Man sieht daraus, daß eine Serie von Echos sich anders verhält als ein Einzelecho und, was von vornherein wahrscheinlich ist, weniger stört. Auf der anderen Seite scheint aber auch das folgende Ergebnis festzustehen: Ersetzt man ein Einzelecho durch eine Anzahl sehr kurz aufeinander folgender, lautschwacher Echos, deren Gesamtenergie der des Einzelechos entspricht, so ist auch der subjektive Eindruck der gleiche.

Die Rückwürfe innerhalb der zulässigen Zeit erhöhen aber nicht nur die empfundene Lautstärke,

sondern sie lösen auch eine „raumhafte“ Wirkung beim Beobachter aus. Eine punktförmige Schallquelle scheint sich räumlich auszubreiten, ohne daß aber dabei der Richtungseindruck verlorengeht. Gerade die eben genannten elektroakustischen Versuche von HAAS zeigten mit großer Eindringlichkeit, daß der Richtungseindruck durch den zuerst ankommenden Schall bewirkt wird und auch dann nicht verlorengeht, wenn das aus einer anderen Richtung kommende, aber nicht später als höchstens 50 ms eintreffende Echo vielmals stärker ist (etwa bis zu 10 db). Dies gilt auch dann, wenn wiederum das Einzelecho durch eine Serie kurzzeitig aufeinander folgender lautschwacher Echos ersetzt wird. Dabei scheint übrigens ihre Gesamtenergie den eben genannten Wert von 10 db Pegelunterschied noch etwas überschreiten zu dürfen.

Will man also mit Hilfe von zeitlich richtig aufeinander folgenden Rückwürfen die Schallstärke des direkten Schalls erhöhen, so muß man in bekannter Weise Wand und Decke in der Nähe der Schallquelle geeignet orientieren. Dies ist wohl zum ersten Male mit großer Folgerichtigkeit im Salle Pleyel in Paris gemacht worden. Aber auch Einzelreflektoren sind bekannt, z. B. die ebenen Kanzeldeckel in Kirchen. Auch je ein Reflektor [2] links und rechts von einem Sprecher oder ein großer, parabel- und hyperbelartig gekrümmter Hohlspiegel [3] hinter einem Sprecher sind gelegentlich versuchsweise verwendet worden. Ein Nachteil dieser Anordnungen ist, daß sie dem Auge des Beobachters unmittelbar ausgesetzt sind, ein größerer jedoch, daß man damit die seitlichen Wände des Raumes in der Nähe der Schallquelle nicht richtig ausnützt. Es bereitet zwar keine Schwierigkeiten, den Seitenwänden im Grundriß eine solche Stellung zu geben, daß möglichst viel Schall nach den weiter rückwärts im Raum liegenden Zuschauerplätzen reflektiert wird. Eine solche Anordnung wird bei vielen großen Räumen in mannigfachen Formen durchgeführt (Fächerform, Birnenform, Trapezform usw. des Grundrisses). Diese Überlegungen gelten aber nur für die Ebene, in der sich Schallquelle und Beobachter befinden, d. h. also im allgemeinen für eine horizontale Ebene. Der Schall jedoch, der auf die oberen Teile der Seitenflächen auffällt — und dies sind praktisch große Flächen, bzw. von der Schallquelle aus gesehen große Raumwinkel —, wird dagegen bisher nicht für eine erste Reflexion ausgenützt. Es liegt nun nahe, dies dadurch zu erreichen, daß man die betreffenden Teile der Seitenflächen in eine große Reihe von ebenen Schallspiegeln auflöst und diese um eine vertikale und eine horizontale Achse so dreht, daß sie den Schall an den gewünschten Ort, näm-

¹ Bearbeiter: G. SCHODDER.

lich in die hinteren Raunteile dirigieren. Diese reflektierten Schallanteile haben ebenso wie die an der Decke reflektierten Schallkomponenten den großen Vorteil, daß sie nicht längere Strecken über das Publikum hinweglaufen und dadurch eine zusätzliche Schallschwächung bei mittleren Frequenzen (etwa 0,5 db/m) erfahren. Übrigens gibt es ein einfaches Verfahren, jeden dieser Schallspiegel zu justieren, sofern sie drehbar montiert sind. Man befestigt auf den Platten einen großen optischen Spiegel und läßt das Licht eines Bühnenscheinwerfers, der in der Mitte der vorderen Bühne aufgestellt ist, daran reflektieren. Die Schallspiegel sind z. B. etwa 2 m² groß und können aus gut reflektierenden Sperrholz- oder Bauplatten bestehen. Es kann aber auch angebracht sein, die Spiegel gleichzeitig als Schluckanordnung für tiefe Frequenzen auszubilden.

Vor die ganze Anordnung kommt ein optisch undurchsichtiger, akustisch aber völlig durchlässiger Schirm, z. B. aus Drahtgaze, aus Rohrgeflecht, aus weitmaschigem Stoff, aus sehr stark perforierten dünnen Platten oder aus einem dünnen Holz- oder Metallgitter². Damit ist jede Formgebung des Rau-

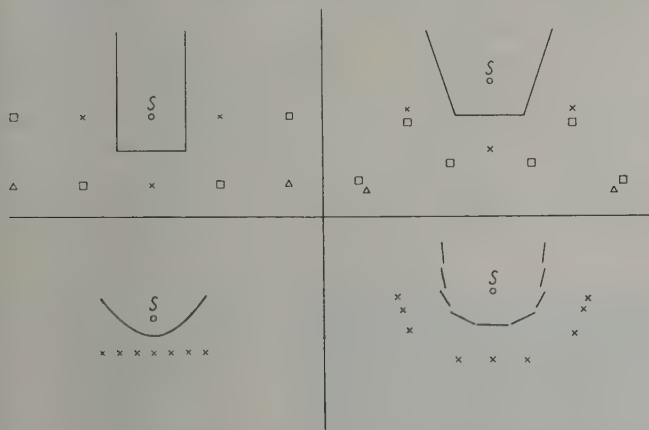


Abb. 1. Schallquelle und Bildpunkte der Schallquelle bei verschiedenen Raumbegrenzungen (parallele Seitenwände, schräge Seitenwände, Parabel und Spiegelanordnung).

mes im Sinne des Architekten möglich. Übrigens kann man an Stelle einer gleichmäßig geneigten und unmittelbar sichtbaren Decke auch hier dasselbe Prinzip der Unterteilung der Decke in viele, nach akustischen Gesichtspunkten geneigte Schallspiegel hinter einer schalldurchlässigen ebenen Abdeckung anwenden.

² Alle diese Anordnungen sind bis zu einer oberen Grenzfrequenz praktisch völlig schalldurchlässig. Man muß sie so bemessen, daß die Grenzfrequenz am oberen Ende des Hörbereichs liegt.

Um die Wegdifferenz zwischen direktem und reflektiertem Schallstrahl klein zu halten, kommt es sehr darauf an, die der Schallquelle benachbarten Wandflächen so auszurichten, daß ihre Spiegelpunkte in bezug auf die Schallquelle möglichst dicht beieinander liegen, und daß möglichst nur erste Reflexionen auftreten. Abb. 1 stellt vier Beispiele zusammen, die der Anschaulichkeit wegen sich nur auf die Darstellung in der Ebene beschränken; es sind dies der Fall der parallelen Seitenwände mit einer ebenen Rückwand, der Fall der schrägen Seitenwände mit einer ebenen Rückwand, der Fall einer Parabel, sowie die Auflösung aller drei Wandflächen in der Nähe der Schallquelle in eine Reihe von Einzelreflektoren. Nur in den beiden ersten Fällen spielen Reflexionen zweiter oder höherer Ordnung eine nennenswerte Rolle. Beim Einsetzen der absoluten Zahlenwerte für die Raumdimensionen und bei der Annahme eines bestimmten Ortes für den Beobachter darf der Abstand des Beobachters von jeder Spiegelschallquelle höchstens 17 m größer sein als der Abstand des Beobachters von der Schallquelle³. Das gleiche gilt für den dreidimensionalen Fall, wobei, wie eben auseinandergesetzt

wurde, die Auflösung gerade der oberen Teile der Seitenflächen in eine Reihe von Schallspiegeln große Bedeutung hat.

Die statistische Theorie zeigt, daß die Energiedichte E_R im diffusen stationären Schallfeld von der Schalleistung L der Schallquelle (Kugelschallquelle) und von der gesamten Schallschluckfläche A des Raumes abhängt, und zwar in der Form

$$E_R = \frac{4L}{Ac}.$$

Andererseits ist die Energiedichte E_D des direkten Schalls

$$E_D = \frac{L}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2 c}.$$

In graphischer Darstellung gibt dies Abb. 2a an, in der der Schallpegel über dem Logarithmus der Entfernung r aufgetragen ist.

Die im größten Teil des Raumes praktisch konstante Energiedichte E_R des diffusen Schallfeldes kommt bekanntlich durch die zahlreichen Schallreflexionen an allen Flächen des Raumes zustande. Mit Hilfe von Spiegelanordnungen gelingt es, den Hörern zahlreiche nützliche Schallreflexionen innerhalb einer Zeitdifferenz von 50 ms nach dem direkten Schall zuzuführen. Die Energie, die in diesen

³ Genaue Werte erhält man entsprechend den Messungen von HAAS und den obigen Angaben über Mehrfachechos.

Reflexionen enthalten ist, ist im akustisch-physiologischen Sinne ebenso wichtig wie der direkte Schall. Sie wird dem diffusen Schall entzogen, insofern sie vom Publikum absorbiert wird. Es seien α

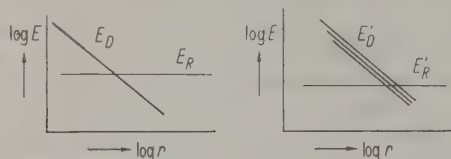


Abb. 2. Schallenergiegedichte des direkten und indirekten Schalles in Abhängigkeit von der Entfernung Schallquelle—Beobachter (ohne und mit Schallspiegel);

$$E_D = \frac{L}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2 c}, \quad E'_D = \frac{\alpha L}{\beta \cdot 4\pi} \cdot \frac{1}{r_m^2 c},$$

$$E_R = \frac{4}{Ac} \cdot L, \quad E'_R = \frac{4}{Ac} \cdot L(1 - \alpha p \alpha).$$

der Bruchteil der von der Kugelschallquelle nach allen Seiten abgestrahlten Schalleistung L , der direkt oder innerhalb von 50 ms zum Hörer gelangt, β der Bruchteil des Raumwinkels 4π , unter dem das Publikum von der Schallquelle aus gesehen erscheint, und α_p die Schluckzahl des Publikums. Dann sind die durch die Spiegelanordnung erniedrigte diffuse Energiedichte E'_R

$$E'_R = \frac{4L}{Ac} (1 - \alpha p \alpha)$$

und die durch die Spiegelanordnung erhöhte Energiedichte E'_D des direkten Schalles einschließlich seiner 50 ms-Trabanten

$$E'_D = \frac{\alpha L}{\beta \cdot 4\pi} \cdot \frac{1}{r_m^2 c}.$$

Dabei ist r_m ein mittlerer Wert der Abstände zwischen Schallquelle bzw. Spiegelpunkt und Beobachter.

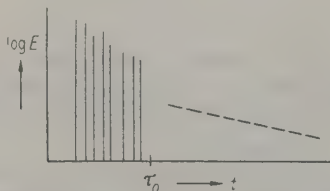


Abb. 3. Schallrückwürfe im 50 ms-Intervall und Nachhall bei Erregung des Raumes mit Impulsen.

In Abb. 3 ist schematisch der zeitliche Schallverlauf bei Erregung des Raumes mit Impulsen angegeben, wobei die Rückwürfe in dem Zeitintervall von 50 ms nach dem direkten Schall einzeln eingezeichnet sind. Die nach dem kritischen Zeitintervall τ erfolgenden Schallreflexionen sind in dem allgemei-

nen Nachhall zusammengefaßt; ihre Hüllkurve ist gestrichelt eingezeichnet.

Je größer man in den obigen Formeln α , d. h. also den Teil der Strahlung einer Kugelschallquelle macht, der das Publikum trifft, je mehr man also die Schallquelle richtet, um so mehr Energie entzieht man dem Nachhallschallfeld, und damit nähert man sich auch in geschlossenen Räumen dem Fall einer im Freien aufgestellten Orchestermuschel, der musikalisch keineswegs ideal ist. Man sieht an diesem Grenzfall, daß es auch möglich ist, die Ziele der geometrischen Akustik zu übertreiben. Andererseits darf man vielleicht auch den Schluß ziehen, daß in Räumen mit starker Betonung der kurz nach dem direkten Schall eintreffenden Reflexionen größere Nachhallzeiten als die bekannten, sogenannten optimalen Werte zulässig, eventuell sogar nötig sind.

Zum Schluß seien einige praktische Anwendungen besprochen, die kürzlich ausgeführt worden sind. Beim Wiederaufbau der Hamburger Staatsoper⁴ (Zuschauerraum 4400 m³, Bühnenraum 1600 m³, 1100 Personen) mußte aus äußeren Gründen ein Provisorium geschaffen werden, das aus der Anfügung eines schmaleren zusätzlichen Zuschauerraumes an den noch stehengebliebenen Bühnenraum bestand, der seinerseits zur Hälfte als Zuschauerraum, zur Hälfte als Bühnenraum dient. Hierdurch ist die eigenartige Form des Grundrisses zu erklären, wie sie aus den Abb. 4a und 4b hervorgeht. Die Dimensionen sind: Länge 31 m, Breite im vorderen Teil des Zuschauerraumes 25 m, im rückwärtigen Teil 16 m.

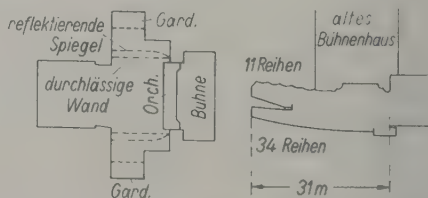


Abb. 4a. Grundriß und Längsschnitt der Staatsoper Hamburg.

Die sonst immer vorhandenen Schallreflexionen an den Seitenwänden in der Ebene Bühne—Zuhörer fallen bei der vorliegenden Grundrißform praktisch aus, zumal an diesen Stellen die offenen Zugänge für das Publikum sowie die Garderobe sich befinden. Hier lag also ein Zwang vor, die oberen Flächen der Seitenwände für nützliche Schallreflexionen zu „aktivieren“. Dies geschah durch je 16 über die beiden vorderen Seitenflächen verteilte Spiegel von insgesamt 64 m² Fläche. Auch am vorderen Teil der Decke

⁴ Architekt W. KALLMORGEN.

wurde ein großer Spiegel angebracht. Diese genannten Maßnahmen haben sich sehr bewährt. Zusammen mit der Anwendung einer starken Überhöhung der Sitzreihen im Rang und im Parkett wurde eine ganz vorzügliche Verständlichkeit der Sprache auf allen Plätzen erzielt, auch unter dem sehr weit vorspringenden Balkon. Im leeren Raum wurden Silbenverständlichkeitsmessungen durchgeführt, die einen Abfall der Verständlichkeit auf den letzten Plätzen von nur wenigen Prozenten gegenüber dem Wert in den ersten Parkettreihen ergaben.



Abb. 4b. Innenansicht der Staatsoper Hamburg (Aufn. Weiß, Hamburg).

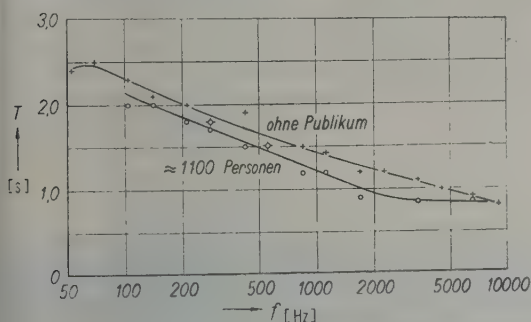


Abb. 5. Nachhallzeit der Staatsoper Hamburg (mit und ohne Publikum).

Der Vollständigkeit halber seien noch einige Messungen in der Staatsoper erwähnt, die nicht in die geometrische, sondern in die statistische Raumakustik gehören. Aus feuerpolizeilichen Gründen durfte in der Staatsoper Hamburg die sonst viel angewendete Sperrholzverkleidung nicht genommen werden. Eingehende Versuche hinsichtlich des Dämpfungsdekre-

mentes von Holz- und Metallplatten zeigten, daß zwei dünne Aluminiumplatten von je 0,5 mm Stärke, mit einer Pappezwischenschicht zusammengeklebt, einen ungefähr gleich großen mechanischen Verlustwinkel wie Sperrholzplatten und den gleichen Schluckgrad haben. So wurden rund 400 m² dieser schwingungsfähigen Plattenabsorber in 5 ... 15 cm Abstand von der Raumwand mit einer Randdämpfung des Luftpolsters (Auskleidung der Ränder mit einem porösen Schluckstoff) eingebaut. Die Nachhallzeiten des Theaters ohne Publikum und bei



Abb. 6. Mensasaal in Bonn (Aufn. Schafgans, Bonn).

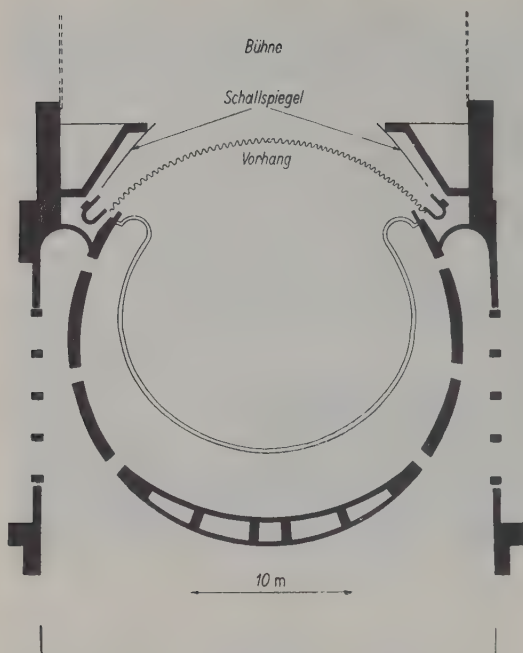


Abb. 7a. Grundriß des Landestheaters Hannover.

voller Besetzung sind in Abb. 5 angegeben. Die akustische Anregung des Raumes erfolgte im leeren Theater mit Knallen, im besetzten Theater wurden die Messungen während einer Opernaufführung bei Generalpausen nach Fortissimostellen des Orchesters gemacht. Die Aufzeichnung geschah über Oktavfilter mit dem Neumannschen Pegelschreiber⁵. Die Kurven in Abb. 5 zeigen übrigens, daß die Nachhallzeiten etwas über den Werten liegen, die man für die Raumgröße der Hamburger Staatsoper sonst als optimal ansieht, und daß sie nach tiefen Frequenzen zu ziemlich ansteigen. Die akustischen Eigenschaften des Raumes werden als gut bezeichnet.

⁵ Bei diesen Messungen und bei den Messungen der Silbenverständlichkeit wurden wir in dankenswerter Weise von der Akustischen Abteilung des Nordwestdeutschen Rundfunks in Hamburg unterstützt.

Ein zweites Beispiel für die Anwendung der Spiegel ist der große Saal des Studentenhauses in Bonn (Abb. 6)⁶. Er dient sowohl als Restaurationsraum wie als Versammlungsraum und als Raum für musikalische und künstlerische Darbietungen aller Art. Er ist rund 3000 m³ groß und faßt 1000 Personen. Die raumakustische Schwierigkeit besteht darin, daß er sehr lang (37 m) und schmal ist und wegen seiner Benutzung als Restaurant keine Überhöhung der Sitzplätze zuläßt. Um auch hier eine gute Verständlichkeit zu erhalten, wurde vorgeschlagen, die frei verfügbaren Flächen in der Nähe der Schallquelle für eine Spiegelanordnung auszunützen, und zwar sind dies die Rückwand und die Decke. Bei der Rückwand ist die Spiegelanordnung nicht verkleidet, sondern frei sichtbar, während die Decke auf ihrer ganzen Breite und in etwa 10 m Länge, von der Rückwand aus gerechnet, mit Spiegeln versehen ist, die um die horizontale und um die vertikale Achse so gedreht sind, daß möglichst viel Schall auf die rückwärtigen Plätze im Parkett und auf die Galerie kommt. Die Deckenspiegel sind durch ein Drahtgewebe verkleidet. Der Erfolg dieser Maßnahmen ist gut. Auch für die letzten Reihen des Saals wird die Sprechverständlichkeit als gut bezeichnet. Eine vorhandene Lautsprecheranlage wird nur bei sehr leisen Sprechern eingeschaltet.

⁶ Architekt T. KLEEFISCH, Bonn.

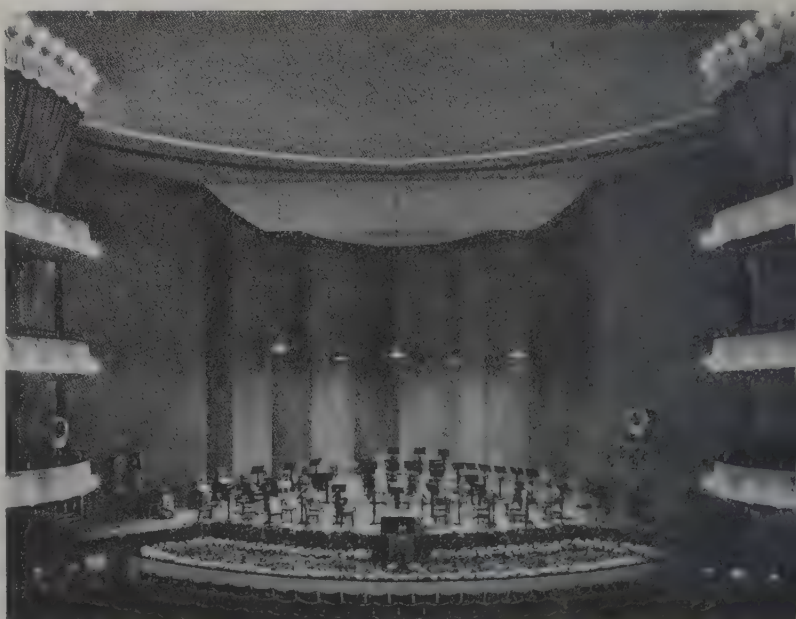


Abb. 7b. Innenansicht des Landestheaters Hannover (Aufnahme Bauverwaltung, Hannover).

Zum Schluß sei noch das im Ausbau befindliche Landestheater Hannover⁷ erwähnt (Abb. 7a und 7b). Der Zuschauerraum hat ein Volumen von 7000 m³. Infolge des hier wohl zum ersten Male in die Theatertechnik eingeführten Rundvorhanges und infolge der auf der vorderen Bühne aufgestellten zahlreichen Beleuchtungsscheinwerfer fallen gegenüber der sonst üblichen Theaterbauweise (Proszeniumswände) erhebliche Teile der unteren Seitenwände für eine Schallreflexion aus. Es sind dies aber gerade die Seitenwände in der Nähe der Schallquelle, die besonders wichtig sind. Um diesen Mangel bis zu einem gewissen Grade auszugleichen, wurden auf der Vorbühne an der in Abb. 7 bezeichneten Stelle zwei Reihen von Schallspiegeln, die sich vom Bühnenfußboden bis zur Decke erstrecken,

angebracht. Auch hier kann man bei Personen, die auf dem vorderen Teil der Bühne sprechen, sehr gut den Einfluß der Spiegel in einer Zunahme der Lautstärke und der Verständlichkeit feststellen. Leider mußten aus anderen Gründen die Spiegel schräg aufgestellt werden, so daß sie für Schauspieler, die weiter hinten auf der Bühne stehen, nicht mehr wirksam sind. Eine zur Bühnenachse parallele Aufstellung der Spiegel würde ihren Einfluß erheblich erhöhen.

(Eingegangen am 15. Juni 1951.)

Schrifttum

- [1] HAAS, H., Über den Einfluß eines Einfachechos auf die Hörsamkeit von Sprache. *Acustica* **1** [1951], 49—58.
- [2] BERG, R. und HOLTSMARK, J., D.K.N.V.S. *Forhandlinger* **13**, Nr. 16.
- [3] FOKKER, A. D. und STRUTT, M. J. O., *Arch. Musée Teyler* **7** [1930], 77—87.

DESIGN AND ANALYSIS OF SUBJECTIVE ACOUSTICAL EXPERIMENTS WHICH INVOLVE A QUANTAL RESPONSE

by D. L. RICHARDS, B. Sc., F. S. S., A. M. I. E. E.

Post Office Research Station, Dollis Hill, London

Summary

Subjective acoustical measurements involve quantities which do not possess an intrinsic scale of magnitude and so the only observations possible are in the form of very simple classification judgments or quantal responses. These measurements are usually also concerned with relating the subjective response to some objective, physically measurable stimulus. Much of the methodology developed in the broader field of biological experimentation is surprisingly appropriate to these problems. Some examples are given of the application of "probit analysis" and "analysis of variance" to the measurement of telephone circuits. These statistical methods used with appropriate designs of experiments not only yield valid confidence intervals but also point to the most efficient method of conducting the measurements through separation of the several sources of variation.

Sommaire

Les mesures acoustiques subjectives font intervenir des grandeurs dont les amplitudes ne peuvent pas être rapportées à une échelle intrinsèque; les observations faites ne peuvent être exprimées que sous la forme d'une très simple classification («quantal responses»). Les mesures ont généralement trait, par ailleurs, à la relation existant entre une réponse subjective et un certain stimulus objectif et physiquement mesurable. Une grande partie de la méthodologie mise au point pour l'important domaine de l'expérimentation biologique convient étonnamment bien à l'étude des problèmes ci-dessus. On donne ainsi quelques applications de la «probit analysis» et de l'«analysis of variance» à l'étude des circuits téléphoniques. De telles méthodes statistiques, appliquées à des schémas expérimentaux appropriés, non seulement permettent d'obtenir des inégalités sûres, mais aussi conduisent au procédé de mesure le plus efficace, en ce qu'elles permettent de séparer les différentes causes de variation.

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß gewisse statistische Methoden, die in der Biologie verwandt werden, sich gut für subjektive akustische Messungen eignen. Einige Beispiele für die Anwendbarkeit dieser Methode auf dem Gebiet des Fernsprechwesens werden angeführt.

1. Definition of the class of problems covered

The technique of assessing properties of telephone circuits by subjective responses has been gradually developing over several decades. Only recently,

however, has an impetus been given by the development of appropriate methodology in the much broader field of biological experimentation. These methods are now being used in telephone measurements. As they are also applicable to a very

wide range of subjective experiments, the problems are treated here in a rather general manner.

Subjective acoustical measurements differ from most ordinary physical measurements in an important respect, namely that the quantities which are being measured do not possess an intrinsic scale of magnitude. For example, whereas there is no difficulty involved in the conception: "length *A* is 1.4 times length *B*", the phrase: "telephone circuit *A* is 1.4 times as easily usable as telephone circuit *B*" is virtually meaningless. If a subject is presented with two circuits, the only relevant subjective observation that it is possible to make is to ask him to decide upon one of a number of possible responses to a question such as, for example: "Which of the following responses is the most appropriate?"

- (1) *A* is more easily usable than *B*,
- (2) *B* is more easily usable than *A*,
- (3) *A* and *B* are equally easily usable.

It is usually possible to restrict the choice to one of two responses, either by combining (3) with (1) or (2) or by disallowing (3). The methods described below are appropriate when there are two alternative responses. Such "yes/no", "all/none", "positive/negative" or "death/survival" responses are termed "quantal" responses.

If three possible responses must be allowed the method to be described can still be used but the analysis becomes more complicated. The results would then be analysed (a) with (3) combined with (1) and (b) with (3) combined with (2); the interval between the results for (a) and (b) then gives a "range of indifference".

As is shown later, quantal responses are also involved when measurements are conducted by making some adjustment so that, for example, equal loudnesses are obtained.

A second feature of subjective acoustical measurements is that one is usually concerned with relating the subjective response to some objective, physically measurable stimulus. The level of such a stimulus is then used as a measure of the corresponding subjective response.

Two kinds of experiment will be distinguished here: the first uses the judgments of a large number of subjects, each subject being used once only; the second makes use of a crew containing a limited number of subjects, each member of the crew being used many times. There exist different situations where either one of these is more appropriate. For example, if completely unpracticed subjects must be employed the first kind must be used; if, however great precision is required it would be better to use the second kind.

2. An experiment using a large number of subjects each once only

A telephone assessment problem will be taken as an example of the use of a large number of subjects. In this case generality of the results was more important than precision. The problem was to determine the minimum received level of a telephone circuit which would be regarded as usable by at least 50% of subjects. The subjects were asked to converse in pairs over the circuit set to a given level and then to give their decision by answering the question: "Was the circuit usable or not usable?" Seven different values of level were used altogether in the whole experiment, but each pair of subjects was given one value only. The subjects of each pair gave their decisions independently by signal with a push-button. A total of about 850 subjects was used and the percentage of positive (usable) responses determined for each level. The level, x , was expressed in logarithmic units (decibels). The results which apply for the subjects who used one particular end of the circuit and who were referred to as "callers" are given in Fig. 1. The results for the subjects who used the other end were treated separately lest the two sets were not independent.

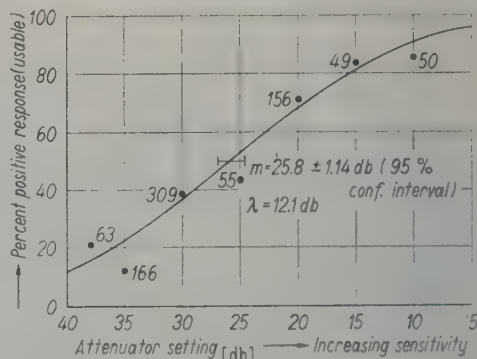


Fig. 1. Percentage positive response (usability) as a function of sensitivity.

2. 1. Analysis of the results

The results given in Fig. 1 will now be considered in detail as an example of the application of statistical methods which have been developed in the biological field for assaying the potency of drugs. Such work is termed "biological assay" and the particular statistical method used here is termed "probit analysis".

When analysing any experimentally obtained data it is necessary to make certain assumptions [1]. These are acceptable either because they are regarded as self-evident or in view of previous experience.

The validity of any method of analysis depends on the truth of its assumptions and, in general, if any of these are false, conclusions drawn from the data will be unfounded and may be misleading. It is fortunate, however, that some of the necessary assumptions need only be "approximately" true; that is to say, if the data themselves do not render them unlikely they may be accepted. If this were not the case scarcely any statistical methods could ever be used in practice!

The first assumption which concerns the methods to be described here is that, if the number of observations were increased indefinitely and the intervals between the values of x made smaller (while still covering the same range), the observed points would lie on a smooth curve. This may be regarded as self-evident. The second is that the observations actually made form a random sample of the infinite population of possible observations which might have been made. This may, under certain conditions defined later, also be accepted. The third assumption is that the smooth curve referred to above has a particular mathematical form.

In biological assay terminology, a stimulus is applied to the subject and the response is measured. In the case of quantal responses, if P is the proportion of positive responses and x is the stimulus, P is a function of x . Many mathematical functions have been suggested [2], [3], but only the probability integral will be considered here. (The word probit is derived from this function.) There is no special reason for using it here except that the necessary tables are available and that the data are not in disagreement with it. It also so happens that practically identical results are obtained if one of the alternative functions is used. This particularly applies if only the value of x is required which corresponds to $P = 0.5$. In probit analysis it is assumed that:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} \int_{-\infty}^x e^{-(x-\mu)^2/2\lambda^2} dx$$

where μ and λ are to be estimated from the data.

The assumption of a function $P=f(x)$ can be considered from a different aspect as follows. Let us consider a hypothetical experiment using a given subject; the value of x is gradually increased until the subject just gives a positive response. This critical value is termed the "tolerance". If we now assume that the tolerances for the population of subjects are distributed in the form $df(x)/dx$, this is identical to the former assumption. If $f(x)$ is the probability integral, then, of course, the distribution is Gaussian. In almost all statistical analysis of ex-

perimental data a Gaussian distribution is assumed without any special positive evidence in its favour. As will be shown later the conception of tolerances is very convenient when complicated experiments are considered.

The analysis therefore consists of choosing the "most likely" values for the two parameters of the function. This estimation is carried out by the method of maximum likelihood. Details of the computational procedure are given elsewhere [4] but a sketch of the principles will be given here. It is convenient to write the function relating the proportion of positive responses as $P=f(x; A, B)$ where A and B are two parameters which define μ and λ .

When $x=x_1$, let $P=P_1$ and let n_1 be the number of positive responses observed out of N_1 . Then the probability that exactly n_1 positive responses would be obtained at random out of N_1 trials is

$$\frac{N_1!}{n_1! (N_1 - n_1)!} P_1^{n_1} (1 - P_1)^{(N_1 - n_1)}.$$

The compound probability that exactly n_1 would be obtained out of N_1 , that n_2 would be obtained out of N_2 , and so on, is the product of all the similar terms. This product (or strictly a quantity proportional to it) is termed the "likelihood" of the set of observations. The method of maximum likelihood consists of so choosing the parameters that this quantity is a maximum. The calculations yield m , an estimate of μ , and b , an estimate of $1/\lambda$. m is the median value of x and λ is the standard deviation of the tolerance distribution. It is also possible to determine confidence limits for m and b . A complete fitted curve may be drawn to the observed points giving the value of x for any desired value of P . Such a curve has been drawn on Fig. 1 and its parameters are $m=25.8$, $\lambda=12.1$ (both in decibels).

2. 2. Assumptions implied by the method of analysis

In addition to the assumption of a particular mathematical form for P as a function of x , other assumptions are made implicitly when the probit method of analysis is used. The most important of these is that the reactions of the subjects are independent of the batches into which they are divided for allocation to the various levels of x . To eliminate possible sources of bias it is necessary to take certain precautions such as: to ensure that the subjects do not know the value of x which is being used; to allocate the subjects at random to the values of x . The importance of randomization cannot be too strongly emphasized. If correct randomization is not carried out the results may be seriously biased and wrong conclusions may be drawn.

The dispersion of the observed results about the fitted curve can be tested statistically and this test should normally be included in the computations. A statistic χ^2 is calculated and, if χ^2 is not significant, the dispersion may reasonably be attributed to chance. If, however, χ^2 is found to be significant, either the probability integral was not a suitable choice of function or (more frequently) the reactions of the subjects were not independent of x . The latter effect may arise through a systematic, though inadvertent, allocation of subjects. For example, the values of x may have been used in a systematic order which, perhaps unknown to the experimenter, happened to coincide with the order of some other factor. It may have been that there were, say, seven values of x and perhaps the subjects were called in groups of seven so that the subject who had to wait the longest always used the same value of x . This is a fairly obvious fault of organization which would usually be avoided in any case, but it is impossible to foresee every factor which may conceivably affect the results. The difficulty can be completely overcome, however, by using the values of x in random order.

It is sometimes objected that the use of randomization increases the dispersion of the experimental results. This is sometimes true but the reduced dispersion by not randomizing is then spurious and will give a false suggestion of precision unless the systematic arrangement is in accordance with a properly planned, executed and analysed experiment. An example of this type of experiment is given later.

3. Measurements using the same subject repeatedly

It is frequently necessary in subjective experimentation to use a comparatively small team of subjects each member of which is used for every condition and, in order to increase precision, the entire set of measurements is repeated several times. This procedure requires a very careful consideration; there are circumstances under which increasing the number of observations does not increase the precision as much as might be expected. In such cases inappropriate analysis can lead to misleading conclusions.

As an example a very common problem in telephone assessment will be considered. There are two telephone channels and one of them is adjustable in sensitivity. It is required to determine the sensitivity setting which causes the loudness of the received speech over both channels to be the same. Usually one of the channels is a Reference Channel (R) and the other is to be assessed in terms of the

Reference Channel. Sometimes the channel to be assessed (X) is the adjustable one and the setting of X is required which corresponds to the fixed Reference Channel. In other instances the Reference Channel is adjustable and its setting is required which corresponds to the fixed channel X. The latter situation is analogous to audiometry and subjective loudness measurements.

3.1. Three methods of loudness balancing

The method of loudness balancing to be described is novel not only as regards the way in which the data are analysed but also the actual conduct of the observations.

There are two commonly used methods which will be briefly described first. Method I (see Fig. 2) uses a team of three persons; one acts as talker, one as listener and one as balancer. The talker provides a constant level of speech by repeating a phrase such as "ONE-TWO-THREE-FOUR-FIVE". The listener is required to signal his decisions to the balancer; each of these decisions is either "X is louder than R" or "R is louder than X". The decision relates to the loudness of the speech received through the two channels. The task of the balancer is to adjust the sensitivity of, say, X (if X is the adjustable channel and R is fixed) in accordance with the decisions of the listener until

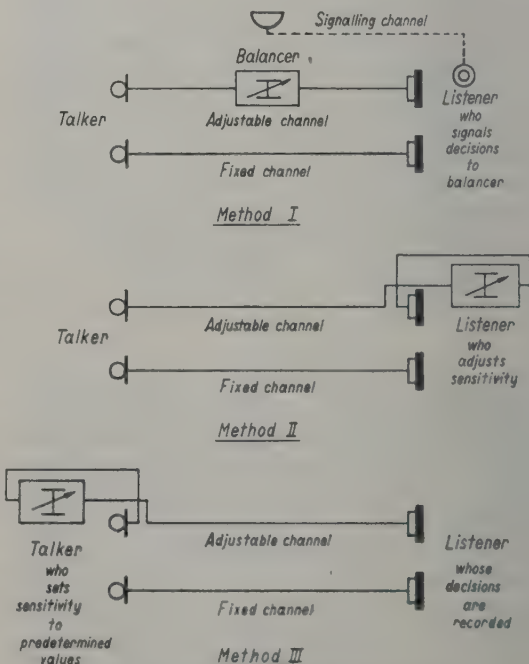


Fig. 2. Three methods of loudness balancing.

he has decided what setting of X corresponds to equality of loudness as judged by the listener. The task of the balancer is very difficult because he is required to have insight into the mind of the listener. Considerable training is necessary when this method is used.

Some reduction of the amount of skill required is achieved by using method II (see Fig. 2) where the tasks of listener and balancer are combined. Only two persons are necessary, a talker and a listener. The talker acts as in method I but the listener is given control of the sensitivity of X which he must adjust until he has decided that the speech from both channels is equally loud. The essential part of any subjective measurement is the making of decisions. Both the methods so far described require also some action consequent upon each decision. This latter element is undesirable and can with advantage be eliminated so that all action such as the setting of the sensitivity control is determined in advance. Method III limits the subjective element of the measurement to the mere giving of decisions.

Method III (see Fig. 2) requires two persons whose tasks are as follows. The talker, as before, provides the speech input to the telephone channel, but he also sets the sensitivity to a predetermined value. The listener gives his decision which is recorded. The talker then sets the sensitivity to the next value and the listener again gives his decision. The observations are therefore obtained as a set of sensitivity settings with their corresponding decisions. The listener is required to give about eight decisions in succession, the sensitivity settings being presented in random order. It is convenient still to use a team of three persons so as to have six different talker/listener combinations available. In a typical experiment eight different sensitivity settings might be used and each talker/listener combination be used twice; there would then be twelve decisions per sensitivity setting. Such a set of observations will usually suffice since it will yield a 95% confidence interval of about ± 0.8 db. The results obtained by method III are analysed by the probit technique and so attention must be paid to the conditions for validity. The most important requirement is that the circuits and sensitivity settings must be allocated at random to the talker/listener pairs. A satisfactory method of doing this randomization is as follows. Suppose that there are two telephone circuits, R and X, and that it is desired to adjust the sensitivity setting of X so that the loudness of the received speech is the same for each. There are eight settings of the sensitivity control

and six talker/listener combinations are to be used twice each, so that there will be twelve sets of decisions. The twelve sets are numbered and one of these numbers is drawn at random, with replacement, for each of the ninety-six decisions (twelve for each of the eight sensitivity settings). This results in unequal numbers of decisions to be made by each talker/listener pair on each occasion. There is no disadvantage in this; it may even be an advantage that the listener does not know which decision is to be the last of a set. The results of such an experiment are given in the following Table I. In this experiment a given circuit (X) was adjustable and the setting of this adjustment was required which corresponded to a level of loudness of the received speech defined by the fixed setting of a reference circuit (R). The talker repeated a phrase of meaningless syllables. The sensitivity settings of X are at 2 db intervals, increasing in attenuation from 1 to 8. In the table the setting number is given together with the decision which was given; R indicates that the reference circuit was judged to give the louder received speech and X, the circuit being adjusted.

Table I

no. of set of decisions	talker/listener combination	number of sensitivity setting and the decision given
1	A/B	4X 4X 4X 6R 6R 5X
2	B/C	4X 1X 4R 7R 4X 8R
3	C/A	2X 5X 3X 7R 8R 1X 3X 3X
4	A/C	1X 7R 2X 7R 2X 8R 3X 6R 8R
5	C/B	3X 2X 8R 6R 2X 7R 1X 2X
6	B/A	6R 8R 1X 7R 3X 3X 2X
7	A/B	7R 4R 6R 8R 8R 3X 6X 2X 7R
8	B/C	1X 2X 1X 5R 5R 7R 3X 2X 1X 4X 5R 3R
9	C/A	6R 2X 6R 8R 7R
10	A/C	6R 8R 5R 4X 3X 5R 8R
11	C/B	5R 6R 5X 4X 6R 8R 5X 1X 4X
12	B/A	7R 1X 1X 4X 3X 5X 5R 1X 2X 7R

These results are analysed by the probit method as before. An R decision is counted as a positive response and when the numbers of these are classified under the eight sensitivity settings Table II is obtained.

Probit analysis of these data yields the following results:

Median sensitivity setting (corresponding to 50% positive response) = $m=70.47$ db.

95% confidence interval of $m=\pm 0.81$ db.
 $\lambda = 1.94$ db.

The goodness of fit of the function whose parameters are m and λ is satisfactory as judged by

χ^2 . That is the departures of the observations from the fitted curve are within those to be expected by chance.

The statement of a confidence limit always requires some explanation of its meaning; in the above it applies to repetitions of the measurements using the same talker/listener combinations allocated at random in the same way.

Table II

sensitivity setting (attenuation)		total number of decisions <i>N</i>	number of positive responses <i>n</i>	percentage of positive responses
no.	<i>x</i> [db]			
1	63	12	0	0
2	65	12	0	0
3	67	12	1	8
4	69	12	2	17
5	71	12	7	58
6	73	12	11	92
7	75	12	12	100
8	77	12	12	100

3. 2. Effect of the subject

The method given above satisfies the requirements for validity of the probit method and provides a test of the departure from a Gaussian distribution of the tolerances. The confidence interval can only, however, be calculated which applies to repetitions of the measurements with the same combinations of talker and listener. If the more general confidence interval is required which applies for any talker/listener combinations drawn from the same population, a different experimental design must be used because the effect of talker/listener combinations must be estimated. It may, furthermore, be suspected that there is an interaction of circuits and talker/listener combinations, i.e. that a different result may be obtained for the difference between two circuit pairs when two different talker/listener combinations are used.

These questions can best be answered by arranging the experiment so that the results can be analysed by the analysis of variance method. It has been found that one talker/listener combination which has given one consistent result on one occasion will sometimes give a different, but still consistent, result on another occasion. For this reason the

measurements must be so conducted that a separate estimate of *m* is obtainable from every set of (say, eight) decisions. These values of *m* form the units which are subjected to analysis of variance.

An estimate of *m* can be made from a set of, say eight decisions given for eight different, equally spaced, settings of sensitivity. For example suppose the following results were obtained for one set of decisions:

setting [db]	0	2	4	6	8	10	12	14
decision	X	X	X	R	R	R	R	R

A good estimate of *m* is the mean of the highest sensitivity which yields a negative response and the lowest sensitivity which yields a positive response [4], [5]. In this case the mean is of 4 and 6, namely 5. Sometimes there is no setting of sensitivity below which only negative responses have been given and above which only positive responses have been given. In such cases there may be said to be a cross-over. An example is as follows:

setting [db]	0	2	4	6	8	10	12	14
decision	X	X	R	X	R	R	R	R

The same rule may still be applied; a good estimate of *m* is the mean of 6 and 4, again 5. Actually the probability of occurrence of a cross-over is a function of the ratio *d*/ λ , where *d* is the interval between sensitivity settings. In this case *d* = 2 db. It is shown later that the proportion of cross-overs can be used to estimate λ .

An example will now be given to illustrate this method. Table III shows part of the results (those for two circuits only) of an experiment to determine the attenuation setting of a reference circuit, R, which corresponds for loudness of received speech to each of five circuits, *X*₁, *X*₂, *X*₃, *X*₄, *X*₅. The indi-

Table III

block	talker/ listener pair	circuit <i>X</i> ₁								circuit <i>X</i> ₂							
		attenuation of R [db]								attenuation of R [db]							
		8	10	12	14	16	18	20	22	16	18	20	22	24	26	28	30
I	A/B	R	R	R	R	R	R	X	X	R	R	R	R	R	X	X	X
	B/C	R	R	X	X	X	X	X	X	R	R	X	X	X	X	X	X
	C/A	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	X	R	X	X
	A/C	R	R	X	X	X	X	X	X	R	R	X	X	X	X	X	X
	C/B	R	R	R	R	X	X	X	X	R	R	R	R	R	R	X	X
	B/A	R	R	R	R	R	X	X	X	R	R	R	R	R	R	R	X
II	A/B	R	R	R	R	X	X	X	X	R	R	R	R	R	R	X	X
	B/C	R	R	R	R	X	X	X	X	R	R	X	X	X	X	X	X
	C/A	R	X	X	X	X	X	X	X	R	R	R	X	R	X	X	X
	A/C	R	R	X	X	X	X	X	X	R	R	R	R	X	X	X	X
	C/B	R	R	R	X	X	X	X	X	R	R	R	R	R	R	X	X
	B/A	R	R	R	X	X	X	X	X	R	R	R	X	X	X	X	X

vidual values of m estimated as above have been entered in Table IV which also shows the summations necessary for computing the sums of squares required in carrying out an analysis of variance. The observations were made in the following way:

- The observations of Block I were completed before Block II was commenced.
- The talker/listener combinations were used in rotation in the order given.
- The circuits were used in random sequence.
- The attenuator settings within each set of eight decisions were presented in random order.

Table IV

block	talker/ listener pair	circuits					sum over circuits
		1	2	3	4	5	
I	A/B	19	25	42	47	56	189
	B/C	11	19	32	41	52	155
	C/A	23*	25	42	45	60	195
	A/C	11	19	32	43	54	159
	C/B	17	27	38†	47	58	187
	B/A	17	29	34	51	54	185
	sum	98	144	220	274	334	1070
II	A/B	15	27	40	45	56	183
	B/C	15	19	34	41	54	163
	C/A	9	23	40	43	52	167
	A/C	11	23	38	45	56	173
	C/B	13	27	40	49	56	185
	B/A	13	21	34	41	54	163
	sum	76	140	226	264	328	1034
sum over blocks	A/B	34	52	82	92	112	372
	B/C	26	38	66	82	106	318
	C/A	32	48	82	88	112	362
	A/C	22	42	70	88	110	332
	C/B	30	54	78	96	114	372
	B/A	30	50	68	92	108	348
	sum	174	284	446	538	662	2104

Table V

factor	degrees of freedom	sum of squares	mean square	variance ratio F	component of variance
circuits	(Q)	4	12681	3170.25	579***
talker/listener pairs	(C)	5	246	49.20	8.99
blocks	(B)	1	21	21.00	3.84
Interactions					
(QC)	20	105	5.25	0.96	$V(QC) = 0$
(QB)	4	35	8.75	1.60	$V(QB) = 0$
(CB)	5	136	27.20	4.97***	$V(CB) = 4.3$
Error	19	104	5.47		$V_e = 5.5$

There are two entries in Table IV, marked * and †; in the case of * all eight decisions were R (this appears on Table III); the mean attenuations have here been estimated on the assumption that the decision for a setting 2 db higher than the highest actually used would have yielded a decision X. The entry marked † corresponds to a missing observation; the value given has been fitted by "missing plot" technique.

The results of the analysis of variance carried out on data given in Table IV are summarized in Table V. The computations for such a table are described elsewhere [6].

The following conclusions can be drawn from this analysis:

- there is no doubt that the circuits yield truly different results,
- the results with different talker/listener pairs are genuinely different, but these differences are not the same in the two blocks; so much so that the differences between talker/listener pairs lack all consistency. This is illustrated by the "very highly significant" talker/listener pairs and blocks interaction (denoted by***), coupled with the non-significant talker/listener pairs effect (tested against the interaction);
- the components of variance enable confidence intervals to be calculated.

The calculation of confidence intervals requires some explanation since different values apply according to the purpose for which they are required. In principle four values can apply in the present example and these can be classified as follows:

1. for a circuit mean as an absolute quantity,

2. for a circuit mean relative to the mean of the group of circuit means,

together with further classification according to whether the confidence intervals are to apply for

(a) the particular group of talker/listener pairs used

or (b) a group of talker/listener pairs drawn at random from the same population of talker/listener pairs.

Table VI shows how these four values are calculated. The table gives the coefficients of the terms which must be added together to give the variance of a condition mean. The standard error is the square root of the variance and the 95% confidence interval is ± 1.96 times the standard error. In this table n_C denotes the number of talker/listener pairs (in this case 6) and n_B the number of blocks (in this case 2).

Table VI

type of confidence interval	V_0 $n_C n_B$	$V(CB)$ $n_C n_B$	$V(B)$ n_B	$V(C)$ n_C	$V(QB)$ n_B	$V(QC)$ n_C
1a	1	1	1	0	1	0
1b	1	1	1	1	1	1
2a	1	0	0	0	1	0
2b	1	0	0	0	1	1

The analysis of variance of the present set of results gives $V_0 = 5.5$, $V(CB) = 4.3$ and $V(B) = V(C) = V(QB) = V(QC) = 0$. The confidence interval of a circuit mean as an absolute quantity (1a or 1b) is therefore $\pm 1.96 \sqrt{5.5/12 + 4.3/12} = \pm 1.8$ db. The corresponding value for a circuit mean relative to the group of circuit means is $\pm 1.96 \sqrt{5.5/12} = \pm 1.3$ db. If two of the circuit means are to be compared with each other the confidence interval of the difference between two circuit means is $\sqrt{2}$ times the latter confidence interval, namely ± 1.9 db.

The above example is of a comparatively small set of observations where only three factors are involved, (Q), (C) and (B), together with their interactions. It is frequently necessary to include other factors such as microphones and receivers; the design of the experiment then becomes correspondingly more elaborate. A suitable design, however, will enable all the appropriate confidence intervals to be estimated and, in addition, will provide a control over the conduct of the measurements. For example, in the above a significant circuits and blocks interaction would have cast doubts on the stability of the physical circuits or on the conduct of the measurements. (For example a wrong circuit might have been set up on one or more occasions.)

In Table III there are two sets of decisions which exhibit a cross-over (see section 3.2 above); out of the whole experiment containing sixty sets of decisions there are five cross-overs, i. e. the proportion of cross-overs is 0.083. The proportion of cross-overs is in a sufficiently large sample a function of the ratio d , the sensitivity interval, to λ , the standard deviation of the tolerance distribution. (The actual proportion observed in any small sample is, like any other statistic, subject to sampling

variation.) In the present instance the value of d/λ which corresponds to a proportion of 0.083 is 1.4; d is 2 db so that λ must be $2/1.4 = 1.4$ db. The variance of individual values of m estimated from sets of decisions as in this experiment is $0.57 \lambda d$ in this instance 1.6. This variance is significantly smaller than the error variance estimated from the analysis of variance, namely 5.5. The conclusion which may be drawn is that the variability of each subject is much less within a set of decisions than it is between sets of decisions. It follows that there is a limit to the precision with which it is useful to measure the individual values of m ; indeed in this experiment four decisions at 4 db intervals ($d = 4$ db) would have resulted in an error variance of no more than 7.1 with a saving of half the number of decisions¹; the precision would have been 77% with 50% of the expenditure of decisions, an increase of efficiency of 54%. This conclusion is rather unexpected but it illustrates the advantage of proper design, conduct and analysis of the measurements. The use of methods I and II of conducting the loudness balancing would never have shown up this effect and much effort might have been employed in a futile attempt to improve the precision of the means for the circuits by conducting the individual balances more precisely.

Table VII is given here which shows the relationship between the expected proportion of cross-overs for values of d/λ from 0.5 to 2.4. Certain approximations have been made in the calculations but the accuracy is quite adequate for the purpose of estimating λ .

Table VII

P is the proportion of cross-overs in a large sample

$\frac{d}{\lambda}$	P	$\frac{d}{\lambda}$	P	$\frac{d}{\lambda}$	P	$\frac{d}{\lambda}$	P
0.5	0.540	1.0	0.196	1.5	0.070	2.0	0.023
0.6	0.448	1.1	0.159	1.6	0.057	2.1	0.020
0.7	0.366	1.2	0.129	1.7	0.046	2.2	0.016
0.8	0.298	1.3	0.105	1.8	0.038	2.3	0.014
0.9	0.242	1.4	0.086	1.9	0.031	2.4	0.011

4. Number of subjects or size of crew required

When each subject is used once only or when measurements are so conducted as to yield results in the form of Table I, it is not difficult, given the

¹ d would then exceed error variance and so it would be advisable to arrange that there are still eight possible settings available at 2 db intervals of which only four alternate settings are used for any one set of decisions Nos. 1, 3, 5 and 7 (in ascending order of sensitivity) or Nos. 2, 4, 6 and 8 should be chosen at random.

value of λ , to calculate how many observations must be made to ensure that the confidence interval of each condition mean is reduced to a given value. When, however, the measurements are conducted in the form of a designed experiment with a systematic arrangement of such factors as talker/listener pairs and blocks, determination of the necessary number of observations depends not only on λ but also on the magnitude of each component of variance. For example, suppose that $V(C)$, the talker/listener pairs variance, only is significant and that the relevant 95% confidence interval is that which applies for a circuit mean as an absolute quantity and for a group of talker/listener pairs drawn at random from the population of talker/listener pairs (type 1b of Table VI). This confidence interval is $\pm 1.96 \sqrt{V_0/n_C n_B + V(C)/n_C}$, where n_C is the number of talker/listener pairs and n_B is the number of blocks, i. e. the number of times each talker/listener pair is used with each circuit. It is clear that the smallest possible 95% confidence interval is $\pm 1.96 \sqrt{V(C)/n_C}$ when n_B is indefinitely large. There is, however, little advantage in increasing n_B beyond the point where $V_0/n_C n_B = V(C)/n_C$ because this reduces the confidence interval to within a factor of two of its minimum value. Greater precision can more easily be achieved by increasing n_C .

The necessary number of observations can, and the necessary size of crew can, of course, only be decided after some measurements have been made and the results analysed. When a large experiment is to be undertaken much wasted effort can be avoided by conducting a small-scale pilot experiment

to determine the order of magnitude of the components of variance and then arranging the main experiment accordingly. Similarly it is often not profitable to spend effort in improving the precision of each elementary value of m , for example by increasing the number of decisions per set.

Table VIII gives a summary of the components of variance obtained in some recent experiments covering a wide range of telephone channels. Eight settings of sensitivity at 2 db intervals were used except for Nos. 22, 23 and 24 when there were six settings at 3 db intervals.

5. Conclusions

The examples given here illustrate the use of methods of conducting subjective acoustical measurements which are believed to be novel in this field. The methods are, however, developed from those in general use in biological experimentation. The methods depend on: 1. the use of appropriate mathematical models, 2. a systematic arrangement of the factors which are being controlled, and 3. randomization of the observations so that all uncontrolled influences operate at random. Much waste of effort can be avoided by efficient design and appropriate analysis of the experiment.

Acknowledgements

The author acknowledges with thanks permission by the Engineer-in-Chief of the Post Office to make use of the information contained in this paper. The author also acknowledges the work of his colleagues who were concerned with making the observations and with performing the computations.

(Received 26th June, 1951.)

Table VIII

experiment no.	V_0	$V(CB)$	$V(B)$	$V(C)$	$V(QB)$	$V(QC)$
10	7.9	3.77	0	2.38	0	0
11*	3.6	0	0	1.87	0	1.89
12	3.6	—	—	0.18	—	0
15	9.4	—	—	0	—	0
18	2.8	—	—	0.42	—	0
20	1.69	—	—	0.90	—	0
22	3.5	—	—	1.25	—	0
23	4.9	—	—	1.96	—	0
24	3.0	—	—	2.48	—	0

0 indicates that the component was not significant,
— indicates that the design did not permit the component to be separated,

* continuous spectrum noise was used instead of speech.

References

- [1] RICHARDS, D. L., An outline of the principles of design and analysis of experiments. Post Office elect. Engrs J. **44** [1951], 55—60.
- [2] WILSON, E. B. and WORCESTER, J., Bio-assay on a general curve. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. **19** [1943], 150—154.
- [3] FINNEY, D. J., Principles of biological assay, J. Roy. statist. Soc., suppl. **9** [1947a], 46—91.
- [4] FINNEY, D. J., Probit analysis. Cambridge Univ. Press, London [1947b].
- [5] GADDU, J. H., Reports on biological standards. III. Methods of biological assay depending on a quantal response. Special report series, no. 183. Medical Research Council; His. Maj. Stat. Off., London 1933.
- [6] BROWNLEE, K. A., Industrial experimentation. His. Maj. Stat. Off., London 1949.

BEITRÄGE ZUR ULTRASCHALLMESSTECHNIK IN FLÜSSIGKEITEN

Von JAN KOPPELMANN

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Zusammenfassung

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird ein neuartiges Sondenmikrophon zur punktförmigen Abtastung von Ultraschallfeldern in Flüssigkeiten bei Frequenzen oberhalb 100 kHz beschrieben.

Der zweite Teil befaßt sich im Anschluß an die Arbeit von HERTZ und MENDE [1] mit dem Zustandekommen des LANGEVINschen Schallstrahlungsdruckes. Es wird gezeigt, daß sich beim Einschalten des Ultraschallgenerators die Dichte der Flüssigkeit im Schallstrahl erhöht, indem von außen Flüssigkeit in den Schallstrahl nachströmt.

Summary

The first part of this paper describes a new form of microphone for point-to-point probing of ultrasonic fields in liquids at frequencies above 100 kc/s.

The second part is concerned, as an extension to the previous work of HERTZ and MENDE [1], with the conditions for LANGEVIN's formula for acoustic radiation pressure. It is shown that the introduction of the ultrasonic generator causes the density of the liquid in the sound beam to rise, following on the inflow of liquid from outside into the sound beam.

Sommaire

Dans la première partie du présent travail, on décrit un microphone-sonde d'un nouveau modèle pour l'étude, point par point, du champ ultra-sonore dans les liquides, aux fréquences supérieures à 100 kHz.

Dans la seconde partie, on s'occupe en complément du travail de HERTZ et MENDE [1], de l'établissement de la pression de radiation sonore de LANGEVIN. On montre que lorsque l'on met en route le générateur d'ultra-sons, la densité du liquide augmente dans le rayon sonore, du fait d'un transport de liquide de la périphérie à l'axe du pinceau sonore.

1. Sondenmikrophone für Ultraschall

Zur punktförmigen Ausmessung von Ultraschallfeldern benötigt man ein Mikrophon, dessen Abmessungen möglichst klein im Verhältnis zur Wellenlänge sind. Abb. 1 zeigt ein Sondenmikrophon zur Messung von Ultraschallfeldern in Flüssigkeiten bei Frequenzen oberhalb 100 kHz, das diesen Anforderungen genügt. Ein etwa 0,5 mm dicker, 200 mm langer Stahldraht ist mit einem Gummi- oder Kunststoffschlauch überzogen, der den Schall möglichst schlecht leitet. Zwischen Draht und Schlauch befindet sich eine dünne, körperschallisolierende Luftschicht. Am unteren Ende sind Draht und Schlauch zusammengekittet, um ein Eindringen von Flüssigkeit zu verhindern.

Wird die Sonde senkrecht in die Flüssigkeit getaucht, so wird die Spitze des Drahtes vom Schallfeld zu Schwingungen angeregt, die durch den Draht auf einen außerhalb der Flüssigkeit am oberen Ende des Drahtes angebrachten piezoelektrischen Kristall übertragen werden. Die erzeugte Wechselspannung wird in der üblichen Weise verstärkt und mit einem Röhrenvoltmeter gemessen.

Die Schallisolation zwischen dem Gummischlauch, der sich ebenfalls im Schallfeld befindet, und der Drahtspitze läßt sich in einfacher Weise überprüfen, indem man die waagerecht liegende Sonde durch einen spitzen Ultraschallsprudel fährt (siehe Abb. 2).

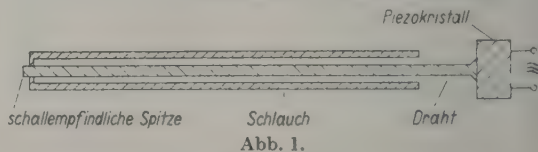


Abb. 1. Schematischer Schnitt durch das Sondenmikrophon.

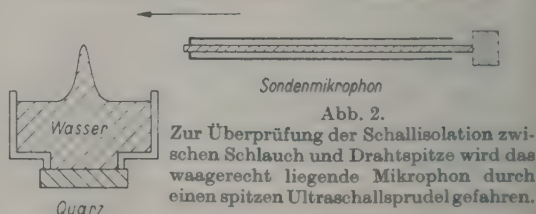


Abb. 2. Sondenmikrophon

Abb. 2.

Zur Überprüfung der Schallisolation zwischen Schlauch und Drahtspitze wird das waagerecht liegende Mikrophon durch einen spitzen Ultraschallsprudel gefahren.

Bei einem Sondenmikrophon mit einem Stahldraht von 0,5 mm und einem Schlauch von 2 ... 3 mm Durchmesser sinkt bei 500 kHz die vom Mikrophon abgegebene Spannung auf den zehnten Teil,

wenn der Schlauch in mehr als 2 ... 3 mm Abstand von der Spitze vom Schall getroffen wird. Steht das Mikrophon senkrecht zum Schallstrahl, so zeigt es bei derselben Frequenz (3 mm Wellenlänge in Wasser) in einer stehenden Welle ein Amplitudenverhältnis von rund 1:20 an. Das Mikrophon arbeitet in einem Bereich von drei Zehnerpotenzen des Schallwechseldruckes praktisch linear. Unter Benutzung eines guten Resonanzverstärkers lassen sich Schalleistungen von $2,5 \times 10^{-2} \text{ W/cm}^2$ noch bequem nachweisen. Infolge der großen Empfindlichkeit lassen sich auch außerhalb der Resonanzfrequenz eines Ultraschallquarzes Messungen durchführen.

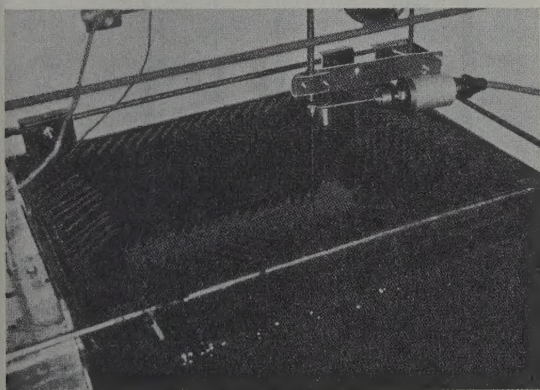


Abb. 3. Blick auf das mit Wasser gefüllte Meßgefäß. Größe: $30 \times 35 \times 45 \text{ cm}^3$. Vor den Glaswänden stehen Absorber aus schräggestellten Gummiplatten, um die Ausbildung stehender Wellen zu verhindern. Die Absorber schlucken etwa 97% der einfallenden Ultraschallenergie (bei 500 kHz). In der Mitte der linken Wand sitzt der im Bild nicht sichtbare Ultraschallquarz. Mit dem Sondenmikrophon, dessen Spitze in das Wasser eintaucht, wird das Schallfeld ausgemessen.

Abb. 3 zeigt eine Anordnung zur Ausmessung von Ultraschallfeldern. Mit dieser Anordnung wurde z. B. das Schallfeld eines Quarzes von 40 mm Durchmesser mit einer Resonanzfrequenz von 500 kHz außerhalb der Resonanzfrequenz bei 200 kHz ausgemessen. Das Ergebnis ist in Abb. 4 niedergelegt.

Während das Mikrophon für Relativmessungen in Schallfeldern bei fester Frequenz recht geeignet erscheint, ist im Hinblick auf die Absoluteichung zu beachten, daß sich auf dem Stahldraht stehende Wellen bilden und daß sowohl Biege- wie auch Dehnwellen angeregt werden können. Man darf daher keinen glatten Frequenzverlauf der Mikrophonempfindlichkeit erwarten. Außerdem läßt sich im Felde stehender Wellen leicht zeigen, daß je nach Frequenz, geometrischen Dimensionen der Stahlsonde und der Anordnung des Piezokristalles das Mikrophon in einem Schnellebauch, einem

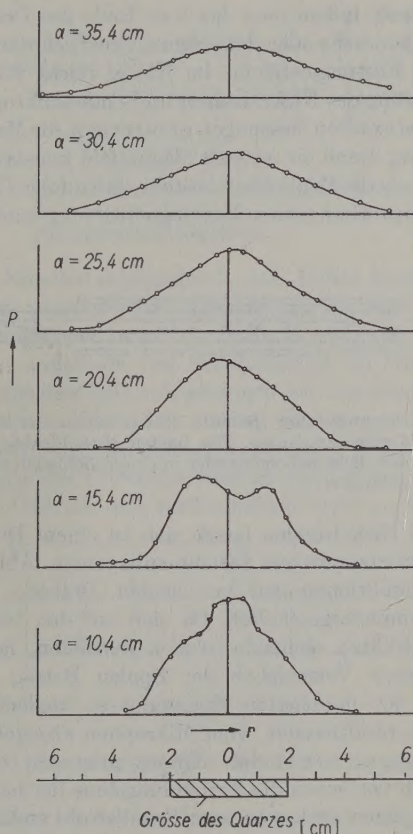


Abb. 4. Schallwechseldruckverteilungen senkrecht zum Schallstrahl bei verschiedenen Abständen vom Quarz. a = Abstand vom Quarz, r = senkrechter Abstand von der Mittelachse des Schallstrahles, p = Schallwechseldruck in willkürlichen Einheiten, \circ = Meßpunkte. Auf den ersten beiden Kurven macht sich das Nahfeld des Quarzes bemerkbar ($f = 200 \text{ kHz}$).

Druckbauch oder in einem dazwischenliegenden Punkt seine maximale Empfindlichkeit erreicht.

Dieser Übelstand läßt sich bis zu einem gewissen Grade beheben, wenn man den Stahldraht durch einen Nickeldraht ersetzt. Infolge des Magnetostraktionseffektes wird in einer kleinen, um den Draht gelegten Induktionsspule eine der Amplitude der Dehnwelle auf dem Draht proportionale Wechselspannung erzeugt (siehe Abb. 5). Die Dehnwelle wird bevorzugt in den Druckbäuchen angeregt, so daß solche Nickelsonden als saubere Druckempfänger anzusprechen sind. Ferner lassen sich

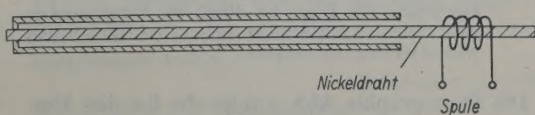


Abb. 5. Schematischer Schnitt durch ein Sondenmikrophon mit einem magnetostriktiven Nickeldraht.

die stehenden Wellen auf dem Draht weitgehend beseitigen, indem man das freie Ende des Drahtes mit Klebwachs oder dergleichen akustisch dämpft.

Der Restmagnetismus im Nickel reicht für die Benutzung des Nickeldrahtes im Sondenmikrophon aus. Bei exakten Messungen ist es ratsam, die Magnetisierung durch ein äußeres Magnetfeld konstant zu halten, da die Möglichkeit besteht, daß infolge Ultraschalleinwirkung eine Entmagnetisierung eintritt.

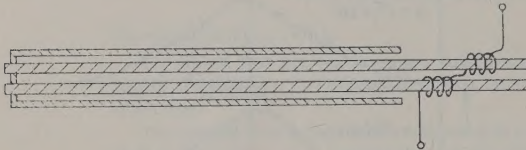


Abb. 6. Schematischer Schnitt durch einen Druckgradientenempfänger. Die beiden Nickeldrähte werden dicht nebeneinander in einem Schlauch untergebracht.

Zwei Nickelsonden lassen sich zu einem Druckgradientenempfänger zusammenbauen (s. Abb. 6). Die Induktionsspulen auf beiden Drähten sind hintereinandergeschaltet. Da sich auf den beiden Nickeldrähten stehende Wellen ausbilden, lassen sich durch Verschieben der Spulen Betrag und Phase der induzierten Spannung so abgleichen, daß die resultierende, vom Mikrophon abgegebene Spannung verschwindet. Nimmt man den Nullabgleich vor, wenn die Verbindungslinie der beiden Drahtspitzen senkrecht zum Schallstrahl steht, so erhält man die für einen Gradientenempfänger typische Richtcharakteristik. Abb. 7 zeigt ein Meßergebnis bei 500 kHz.

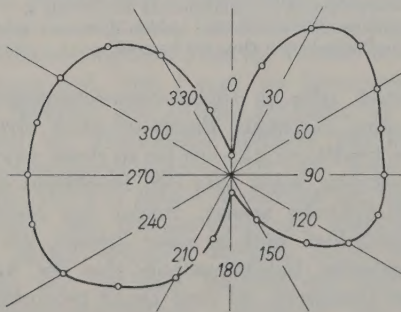


Abb. 7. Richtcharakteristik des Druckgradientenempfängers bei 500 kHz in Wasser. Mittelpunktsabstand der Drahtspitzen 0,9 mm. In radialer Richtung ist die vom Mikrophon abgegebene Wechselspannung in willkürlichen Einheiten aufgetragen. Die Unsymmetrie der Figur ist durch die Unsymmetrie der Dicke der Kittschicht zwischen Schlauch und Nickeldrähten zu erklären.

Die Photographie Abb. 8 zeigt die bei den Messungen benutzten Sondenmikrophone. Die Entwicklung der Mikrophone ist noch nicht abge-

schlossen. Es sollte an dieser Stelle nur die Möglichkeit erörtert werden, auf dem oben beschriebenen Wege Ultraschallfelder punktförmig auszumessen.

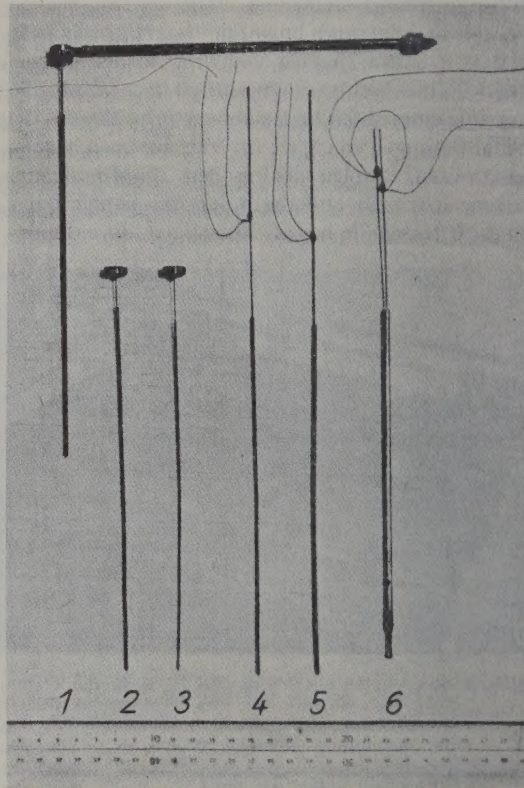


Abb. 8. Die bei den Messungen benutzten Mikrophone. Darunter liegt ein Zentimetermaßstab.

1. Komplettes, piezoelektrisches Sondenmikrophon mit auswechselbarer Sonde, Drahtdurchmesser: 1 mm;
2. auswechselbare Sonde, Drahtdurchmesser: 0,6 mm;
3. auswechselbare Sonde, Drahtdurchmesser: 0,3 mm;
4. Magnetostriktive Sonde mit Spule, Drahtdurchmesser: 0,6 mm;
5. Magnetostriktive Sonde mit Spule, Drahtdurchmesser: 1 mm;
6. Druckgradientenmikrophon, Drahtdurchmesser 0,6 mm, Mittelpunktsabstand der Drähte 0,9 mm.

2. Zum Langevinschen Schallstrahlungsdruck

HERTZ und MENDE [1] haben gezeigt, daß der LANGEVINSche Schallstrahlungsdruck nicht von der Richtung des Schallstrahles, sondern nur von dem Energiedichteunterschied der Energiedichte vor und hinter einer Grenzfläche abhängt. Der Strahlungsdruck kommt dadurch zustande, daß sich die Dichte der Flüssigkeit im Schallstrahl erhöht, indem beim Einschalten des Ultraschall-

generators Flüssigkeit in den Schallstrahl strömt. Folgendes Experiment soll diese Auffassung bestätigen.

Da der Schallstrahlungsdruck ein von Größen zweiter Ordnung abhängiger Effekt ist, läßt sich die dem Strahlungsdruck entsprechende Dichteänderung statisch kaum nachweisen. Wird der Schallsender hingegen etwa 1000mal in der Sekunde ein- und ausgeschaltet, so wird beim Einschalten Flüssigkeit in den Schallstrahl hineingezogen. Beim Ausschalten erfolgt der Druckausgleich, indem dieselbe Wassermenge zurückfließt. Das periodische Ein- und Ausschalten läßt sich am einfachsten durch eine Amplitudenmodulation der am Ultraschallquarz liegenden Hochfrequenzspannung realisieren. In diesem Fall kann man die Begrenzungsfläche des Schallstrahles als einen mit der Frequenz 1000 Hz radial schwingenden Zylindermantel auffassen. Der modulierte Schallstrahl strahlt also eine niederfrequente Schallwelle aus, die sich mit einem Mikrophon außerhalb des hochfrequenten Schallstrahles bequem nachweisen läßt. Der Schallwechseldruck ist allerdings um mehrere Größenordnungen kleiner als der Schallwechseldruck des hochfrequenten Schallstrahles, da, wie bereits erwähnt, der Schallstrahlungsdruck ein Effekt zweiter Ordnung ist. Die Abstrahlung einer niederfrequenten Schallwelle ist ein eindeutiger Beweis für das Nachströmen der Flüssigkeit in den Schallstrahl.

Faßt man den modulierten Schallstrahl als schwingenden Zylindermantel auf, so ist zunächst zu beachten, daß sich der Schall mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Demzufolge schwingt der Zylindermantel nicht auf der gesamten Länge gleichphasig, sondern die Phasenlage ändert sich mit der zu 1000 Hz gehörigen Wellenlänge (in Wasser 150 cm), siehe Abb. 9. Hat der Schallstrahl eine hinreichende Länge, so bedeutet das, daß die niederfrequente Welle gerichtet, in Richtung des Schallstrahles, abgestrahlt wird. Infolge der größeren Wellenlänge dieser Schallwelle reicht das Nahfeld weit über den Ultraschallstrahl hinaus.

Ferner führt das Bild eines schwingenden Zylindermantels zu der Konsequenz, daß zu einem festen Zeitpunkt in einem festen Abstand vom Ultraschallsender ein Überdruck im Schallstrahl einem Unterdruck außerhalb des Schallstrahles entsprechen muß und umgekehrt. Hält man ein kleines, nur auf die Niederfrequenz ansprechendes Mikrophon mit einer senkrecht zur Schallfortpflanzungsrichtung stehenden, druckempfindlichen, ebenen Fläche in den Schallstrahl, so tritt beim Einschalten des Schallsenders an dieser Fläche ein Überdruck,

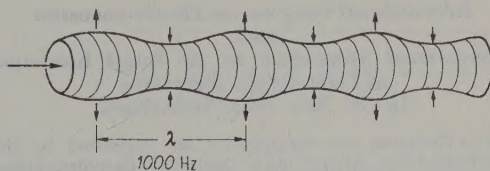


Abb. 9. Der modulierte Ultraschallstrahl läßt sich bezüglich der Modulationsfrequenz als schwingender Zylindermantel auffassen.

der Schallstrahlungsdruck, auf. Dieser kommt dadurch zustande, daß Flüssigkeit in den Schallstrahl hineingezogen wird [1]. Befindet sich das Mikrophon außerhalb des Schallstrahles, so tritt dort zur gleichen Zeit notgedrungen ein Unterdruck auf. Wird das Mikrophon in einer Richtung senkrecht zum Schallstrahl bewegt, so beobachtet man an der Grenze des Ultraschallstrahles einen Phasensprung von 180° , der sich meßtechnisch leicht nachweisen

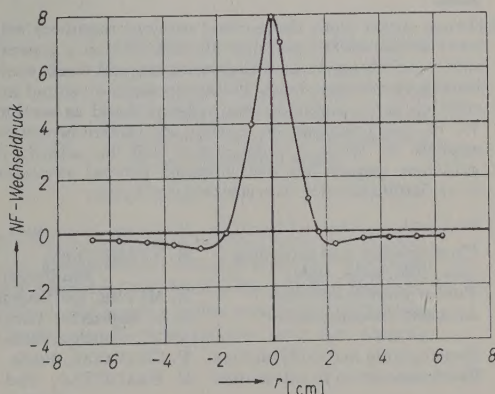


Abb. 10. Niederfrequenter Wechseldruck als Funktion des Abstandes r von der Mittelachse des Schallstrahles im Fernfeld eines 500 kHz-Quarzes von 4 cm Durchmesser. Die Modulationsfrequenz beträgt etwa 1500 Hz. Der Phasensprung von 180° wird durch das Auftragen negativer Werte angedeutet; o = Meßpunkte.

läßt. Abb. 10 zeigt das Ergebnis einer solchen Messung. Bei tieferen Modulationsfrequenzen sinkt die Intensität des niederfrequenten Wechseldruckes außerhalb des Ultraschallstrahles stark ab, weil der Durchmesser des Schallstrahles und die Gefäßdimensionen im Verhältnis zur Wellenlänge zu klein sind. Bei höheren Frequenzen ist das gesamte Meßgefäß mit niederfrequenten, stehenden Wellen erfüllt.

Die Anregung zu diesen Arbeiten ging von Herrn Prof. E. MEYER aus, dem ich an dieser Stelle für viele, wertvolle Hinweise meinen besonderen Dank aussprechen möchte.

(Eingegangen am 1. Juli 1951.)

Schrifttum

[1] HERTZ, G. und MENDE, H., Z. Phys. **114** [1939], 354.

**International Congress on Electro-acoustics
and
International Symposium on the Sound Insulation
of Light-weight Structures
15—21 June 1953, Netherlands**

The Congress and Symposium are organized by the NETHERLANDS ACOUSTICAL SOCIETY (Geluidstichting) under the auspices of the International Commission on Acoustics (ICA, see *Acustica* **1** [1951], 143) of the International Union of Pure and Applied Physics.

Organizing Committee:

R. VERMEULEN, Eindhoven, chairman
C. W. KOSTEN, Delft, vice-chairman
W. Th. BÄHLER, Delft
J. J. GELUK, Hilversum
H. MOL, Leiden
P. A. de LANGE, Delft, secretary

Congress-centre: Delft (near the Hague).

Meetings: in Delft (Technical University), Eindhoven (Philips Works) and Hilversum (Broadcasting centre).

Opening lecture by the President of the International Commission on Acoustics, R. H. BOLT, Cambridge, Mass.

Sections: Apart from the general sessions members will meet in specialized sections. In each section a general review will be given and papers on original work, each lasting 15 minutes, read. The symposium on sound insulation is for organizational reasons listed as section VI of the Congress. A section on electro-acoustics applied to musical instruments will be added, if sufficient papers are forthcoming; general reviewer E. G. RICHARDSON, Newcastle-upon-Tyne.

Nr.	Subject matter of section	General reviewer
I	Phonography and recording (disc, film, wire, tape)	R. VERMEULEN, Eindhoven
II	Public address systems	E. MEYER, Göttingen
III	Acoustic measurements	L. L. BERANEK, Cam- bridge, Mass.
IV	Hearing aids and audiometers	P. CHAVASSE, Paris
V	Electroacoustics in ultrasonics	G. BRADFIELD, Ted- dington
VI	Sound insulation of light- weight structures	C. W. KOSTEN, Delft

Papers:

Those intending to read a paper are requested to communicate as soon as possible name, address, section and title of their paper to the Congress secretary Mr P. A. de LANGE, Laboratorium voor Technische Physica, Mijnbouwplein 11, Delft, Netherlands. The Committee may have to limit the number of papers.

Languages:

English, French and German are the official languages.

Membership:

The fee for ordinary membership will be about 20—40 guilders. The exact amount will be fixed later; it depends upon whether the papers will be printed or not. Fee for associate members: 15 guilders.

Excursions, etc.:

A number of technical and non-technical excursions are being prepared and special arrangements made for ladies accompanying members.

Details:

A circular giving details will be distributed in due time. Further announcements will be made in future issues of this Journal.

For the Organizing Committee

C. W. Kosten
P. A. de Lange

**Cinquième Congrès International d'Oto- Rhino- La-
ryngo- Broncho- Oesophagologie
8—15 Juin, 1953, Amsterdam**

Organisé par la Société Néerlandaise d'Oto-Rhino-Laryngologie.

Prof. EELCO HUIZINGA, président
W. H. STRUBEN, secrétaire général
J. BIJTEL et P. G. GERLINGS, secrétaires scientifiques
Miles A. C. SCHIPPERS et A. DOKKUM, secrétaires de réception

Mme F. VELLEMAN-PINTO, trésorière

A côté des Réunions Combinées (sujets choisis) les Membres du Congrès seront invités à des Réunions Restreintes. Les sujets choisis sont:

TUMEURS DES BRONCHES

A. SOULAS et P. MOUNIER-KUHN, Tumeurs bénignes des bronches
L. PIETRANTONI, La clinique et l'endoscopie des cancers des bronches
L. H. CLERF, Cytology of tumours of the bronchus

AUDIOLOGIE

C. S. HALLPIKE, Physiologic problems of Audiology
G. E. SHAMBAUGH, Clinics of Audiology
S. R. SILVERMAN, Social aspects of Audiology

ALLERGIE

G. DOHLMAN, Theory of Allergy
F. H. HANSEL, Methods of Allergic Examination
R. MELCHIOR, L'hypersensibilité d'origine nonallergique

Programme des Dames. Un Comité de Dames s'occupera des dames étrangères pendant leur séjour.

Langues officielles: l'anglais, le français, l'allemand.

Communications: deux sortes de communications sont demandées.

- Communications originales (15 minutes). Le nombre des communications originales est limité, ainsi que leur discussion. On est prié de s'adresser au Secrétaire (voir plus bas) pour les informations à ce sujet.
- Contributions aux discussions des sujets choisis /des Réunions Combinées: 5 minutes par discours, une heure par sujet choisi.

Cotisations: 100 florins pour les membres, 25 florins pour les Dames et les invités.

Logement à Amsterdam ou aux environs.

Renseignements. Pour inscriptions, informations, suggestions, etc. on est prié de s'adresser au Secrétaire du Congrès.

W. H. Struben,
J. J. Viottastraat 1,
Amsterdam-Z.
(abrége par la Rédaction)